Лекция № 4. Правила сумм для формфакторов

Квантовомеханическая игрушка

А. П. Бакулев

ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ (Дубна, Россия)

4 февраля 2005

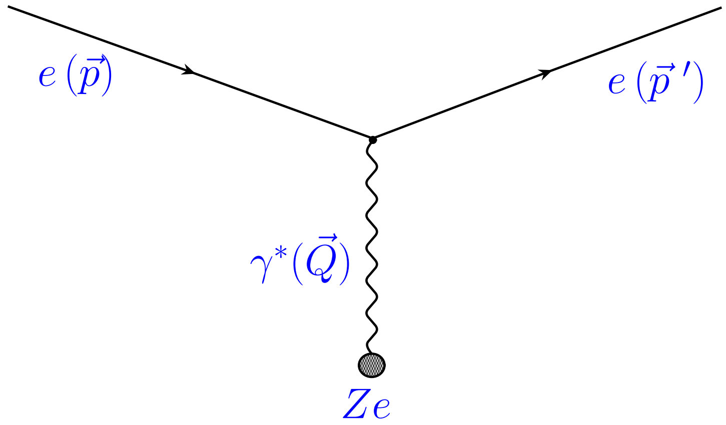
Содержание

- Формфактор: что это такое и зачем он нужен.
- Квантовомеханическая игрушка: 2-мерный гармонический осциллятор.
- Правила сумм для формфактора осциллятора.
- Локальная дуальность для формфактора осциллятора.

Формфактор: что это такое и зачем он нужен.

Формфактор: что это такое?

Рассмотрим рассеяние быстрых электронов на тяжелом точечном заряде: $\vec{p} + \vec{Q} = \vec{p}\,'$

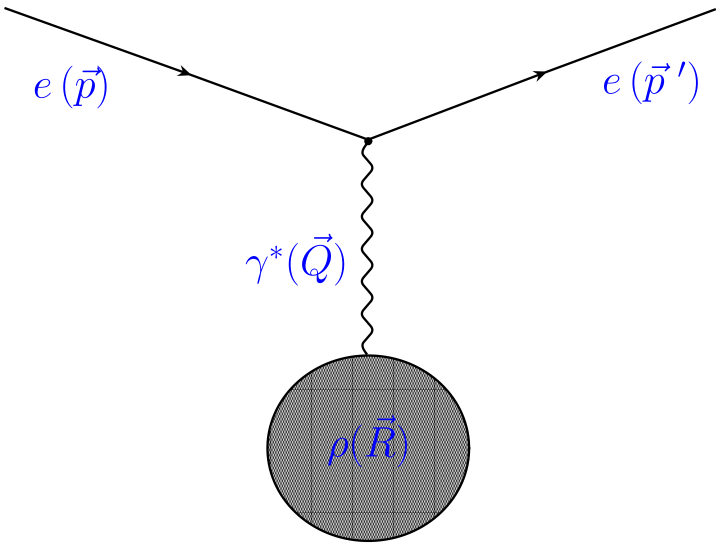


Квантовомеханическая теория рассеяния дает нам ответ для сечения рассеяния на угол θ в случае точечного массивного заряда Ze:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2e^4}{\hbar^4Q^4}\,Z^2\,.$$

Формфактор: что это такое?

Для рассеяния быстрых электронов на объемном распределении заряда $e\rho(\vec{R})$



сечение будет другим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2e^4}{\hbar^4Q^4}\,F(Q)^2\,.$$

Формфактор: что это такое?

Формфактор определяется так:

$$F(Q) \;\equiv\; \int d^3\vec{R}\;\rho(\vec{R})\;e^{-i\vec{Q}\vec{R}}\,.$$

Очевидное свойство формфактора:

$$F(0) \;\equiv\; \int \rho(\vec{R})d^3\vec{R} \;=$$

Формфактор: что это такое?

Формфактор определяется так:

$$F(\vec{Q}) \;\equiv\; \int d^3\vec{R}\;\rho(\vec{R})\; e^{-i\vec{Q}\vec{R}}\,.$$

Очевидное свойство формфактора:

$$F(0) \;\equiv\; \int \rho(\vec{R}) d^3\vec{R} \;=\; Z_{\text{total}},$$

его значение в точке $Q = 0$ определяет полный заряд системы (в единицах e).

Формфактор: что это такое?

Формфактор определяется так:

$$F(\vec{Q}) \equiv \int d^3\vec{R}\,\rho(\vec{R})\,e^{-i\vec{Q}\vec{R}}.$$

Очевидное свойство формфактора:

$$F(0) \equiv \int \rho(\vec{R})d^3\vec{R} = Z_{\text{total}},$$

его значение в точке $Q = 0$ определяет полный заряд системы (в единицах e). Для сферически-симметричного $\rho(\vec{R}) = f(R)$ получим

$$F(\vec{Q}) =$$

Формфактор: что это такое?

Формфактор определяется так:

$$F(Q) \equiv \int d^3\vec{R}\,\rho(\vec{R})\,e^{-i\vec{Q}\vec{R}}\,.$$

Очевидное свойство формфактора:

$$F(0) \equiv \int \rho(\vec{R})d^3\vec{R} = Z_{\text{total}},$$

его значение в точке $Q = 0$ определяет полный заряд системы (в единицах e). Для сферически-симметричного $\rho(\vec{R}) = f(R)$ получим

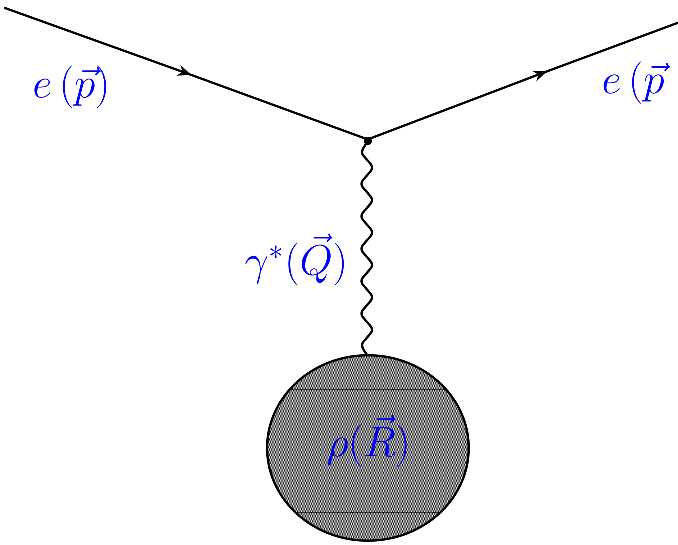
$$F(\vec{Q}) = \hat{F}(Q = \sqrt{Q^2}) = \frac{4\pi}{Q^3}\int_0^\infty f\left(\frac{z}{Q}\right)\sin(z)z dz\,.$$

Формфактор: резюме

Итак, формфактор

$$F(Q) \equiv \int d^3\vec{R}\, \rho(\vec{R})\, e^{-i\vec{Q}\vec{R}}$$

нужен для расчета сечения рассеяния:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2e^4}{\hbar^4 Q^4}\, F(Q)^2\,.$$

Двумерный гармонический осциллятор

Двумерный осциллятор

Простейшая система с конфайнментом – осциллятор с потенциалом $V(\vec{r}) = m\omega^2 r^2/2$. Все формулы сильно упрощаются для случая двух пространственных измерений. Тогда уровни энергии

$$E_n = (2n+1)\omega\,,$$

а значения волновых функций в начале координат

$$|\psi_n(0)|^2 = \frac{m\omega}{\pi}\,.$$

Формфакторы определяются так

$$F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x)\psi_l(x)e^{iQx}\,d^2x = \int \Psi_k^*(p)\Psi_l(p+Q)\,\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\,.$$

Нас будет интересовать ФФ основного состояния $F_{00}(Q^2)$.

Общая схема метода правил сумм

- Изучается коррелятор $M(Q^2, \mu_1, \mu_2)$, для которого имеется разложение:

$$M^{\text{spec}}(Q^2, \mu, \mu) = |\psi_0(0)|^2 F_{00}(Q^2)\, e^{-2E_0/\mu} + \text{“higher states”}$$

Общая схема метода правил сумм

- Изучается коррелятор $M(Q^2, \mu_1, \mu_2)$, для которого имеется разложение:

$$M^{\text{spec}}(Q^2, \mu, \mu) = |\psi_0(0)|^2 F_{00}(Q^2)\, e^{-2E_0/\mu} + \text{“higher states”}$$

- Для него строится пертурбативное разложение:

$$M^{\text{pert}}(Q^2, \mu, \mu) = M_0(Q^2, \mu, \mu) + \sum_{n\geq 1} C_{2n}(Q^2)\frac{E_0^{2n}}{\mu^{2n}}\,,$$

где $M_0(Q^2, \mu, \mu)$ отвечает свободной частице и имеет дисперсионное представление:

$$M_0(Q^2, \mu, \mu) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, e^{-(s_1+s_2)/\mu}\, ds_1\, ds_2\,.$$

Общая схема метода правил сумм

- Изучается коррелятор $M(Q^2, \mu_1, \mu_2)$, для которого имеется разложение:

$$M^{\text{spec}}(Q^2, \mu, \mu) = |\psi_0(0)|^2 F_{00}(Q^2)\, e^{-2E_0/\mu} + \text{“higher states”}$$

- Для него строится пертурбативное разложение:

$$M^{\text{pert}}(Q^2, \mu, \mu) = M_0(Q^2, \mu, \mu) + \sum_{n\geq 1} C_{2n}(Q^2) \frac{E_0^{2n}}{\mu^{2n}}$$

- Правило сумм — это просто:

$$\boxed{M^{\text{spec}}(Q^2, \mu, \mu) = M^{\text{pert}}(Q^2, \mu, \mu)}$$

Общая схема метода правил сумм

- Оказывается, что вклады высших состояний неплохо моделируются с помощью:

“higher states” = “free states” вне квадрата $(0, s_0) \otimes (0, s_0)$

Общая схема метода правил сумм

- Оказывается, что вклады высших состояний неплохо моделируются с помощью:

“higher states” = “free states” вне квадрата $(0, s_0) \otimes (0, s_0)$

- В результате имеем правило сумм:

$$F_{00}(Q^2) = \int_0^{s_0}\int_0^{s_0} \frac{\rho_0(s_1, s_2, Q^2)}{|\psi_0(0)|^2}\, e^{-(s_1+s_2-2E_0)/\mu}\, ds_1\, ds_2$$

$$+ \text{“степенные поправки”}$$

Общая схема метода правил сумм

- Оказывается, что вклады высших состояний неплохо моделируются с помощью:

“higher states” = “free states” вне квадрата $(0, s_0) \otimes (0, s_0)$

- В результате имеем правило сумм:

$$F_{00}(Q^2) = \int_0^{s_0}\!\!\int_0^{s_0} \frac{\rho_0(s_1, s_2, Q^2)}{|\psi_0(0)|^2}\, e^{-(s_1+s_2-2E_0)/\mu}\, ds_1\, ds_2$$

$$+ \; e^{2E_0/\mu} \left[\frac{C_2(Q^2)}{|\psi_0(0)|^2} \frac{E_0^2}{\mu^2} \; + \; \frac{C_4(Q^2)}{|\psi_0(0)|^2} \frac{E_0^4}{\mu^4} \; + \; \ldots \right]$$

Формфактор двумерного осциллятора

В подходе правил сумм мы будем изучать ФФ

$$F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x)\psi_l(x)e^{iQx}\,d^2x$$

Формфактор двумерного осциллятора

В подходе правил сумм мы будем изучать ФФ $F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x)\psi_l(x)e^{iQx}\, d^2x$ с помощью коррелятора, построенного из 2-точечных функций Грина

$$G(\,x,\,1/i\mu\,|\,0,\,0\,) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^*(0)\psi_k(x)e^{-E_k/\mu}\,.$$

Определим коррелятор как фурье-образ

$$M(Q^2,\mu_1,\mu_2) = \int G(\,x,\,1/i\mu_1\,|\,0,\,0\,)\,G^*(\,x,\,1/i\mu_2\,|\,0,\,0\,)e^{iQx}\,d^2x$$

$$= \sum_{k,l=0}^{\infty} \psi_l^*(0)\psi_k(0)F_{kl}(Q^2)\,e^{-E_k/\mu_1-E_l/\mu_2}$$

Формфактор двумерного осциллятора

Этот коррелятор

$$M(Q^2,\mu_1,\mu_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \psi_l^*(0)\psi_k(0)F_{kl}(Q^2)\, e^{-E_k/\mu_1 - E_l/\mu_2}$$

можно записать в виде двойного дисперсионного интеграла (forward)

$$M(Q^2,\mu_1,\mu_2) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s_1/\mu_1 - s_2/\mu_2}\rho(s_1,s_2,Q^2)\,ds_1\,ds_2$$

где спектральная плотность является суммой δ-функций:

$$\rho(s_1,s_2,Q^2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \psi_l^*(0)\psi_k(0)\,F_{kl}(Q)\,\delta(s_1-E_k)\,\delta(s_2-E_l).$$

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

В случае свободной частицы функция Грина известна

$$G_0(\,x,\,1/i\mu\,|\,0,\,0) = \frac{m\mu}{2\pi}\,e^{-mx^2\mu/2} = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,e^{ikx}\,e^{-k^2/2m\mu}$$

Вопрос: как взять этот интеграл по d^2k?

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

В случае свободной частицы функция Грина известна

$$G_0(\,x,\,1/i\mu\,|\,0,\,0) = \frac{m\mu}{2\pi}\,e^{-mx^2\mu/2} = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,e^{ikx}\,e^{-k^2/2m\mu}$$

и коррелятор $M_0(Q^2,\mu_1,\mu_2) =$

$$= \int G_0(\,x,\,1/i\mu_1\,|\,0,\,0\,)\,G_0^*(\,x,\,1/i\mu_2\,|\,0,\,0\,)\,e^{iQx}\,d^2x$$

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

В случае свободной частицы функция Грина известна

$$G_0(\,x,\,1/i\mu\,|\,0,\,0) = \frac{m\mu}{2\pi}\,e^{-mx^2\mu/2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\;\;e^{ikx}\;\;e^{-k^2/2m\mu}$$

и коррелятор $M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \int G_0(\,x,\,1/i\mu_1\,|\,0,\,0\,)\,G_0^*(\,x,\,1/i\mu_2\,|\,0,\,0\,)\;\;e^{iQx}\;\;d^2x$$

$$= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,e^{-k^2/2m\mu_1} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\,e^{-p^2/2m\mu_2} \int e^{i(k+Q-p)x}\,d^2x$$

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

В случае свободной частицы функция Грина известна

$$G_0(\,x,\,1/i\mu\,|\,0,\,0) = \frac{m\mu}{2\pi}\,e^{-mx^2\mu/2} = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,e^{ikx}\,e^{-k^2/2m\mu}$$

и коррелятор $M_0(Q^2,\mu_1,\mu_2) =$

$$= \int G_0(\,x,\,1/i\mu_1\,|\,0,\,0\,)\,G_0^*(\,x,\,1/i\mu_2\,|\,0,\,0\,)\,e^{iQx}\,d^2x$$

$$= \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,e^{-k^2/2m\mu_1}\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\,e^{-p^2/2m\mu_2}\boxed{\int e^{i(k+Q-p)x}\,d^2x}$$

Вопрос: чему равен интеграл по d^2x?

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

После снятия интеграла по d^2p за счет $\delta(k+Q-p)$ имеем

$$M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, e^{-k^2/2m\mu_1} e^{-(k+Q)^2/2m\mu_2}$$

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

После снятия интеграла по d^2p за счет $\delta(k+Q-p)$ имеем

$$M_0(Q^2,\mu_1,\mu_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, e^{-k^2/2m\mu_1} e^{-(k+Q)^2/2m\mu_2}$$

Этот интеграл берется тем же способом, что и предыдущий:

$$= \left(\frac{m}{2\pi}\right) \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\, e^{-Q^2/[2m(\mu_1+\mu_2)]}$$

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

После снятия интеграла по d^2p за счет $\delta(k+Q-p)$ имеем

$$M_0(Q^2,\mu_1,\mu_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, e^{-k^2/2m\mu_1} e^{-(k+Q)^2/2m\mu_2}$$

Этот интеграл берется тем же способом, что и предыдущий:

$$= \left(\frac{m}{2\pi}\right) \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\, e^{-Q^2/[2m(\mu_1+\mu_2)]}$$

Спектральная плотность легко определяется:

$$\rho_0(s_1,s_2,Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Спектральная плотность свободной частицы

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right)\delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Действительно, интеграл по dk^2 берется сразу за счет первой δ-функции, а вторая δ-функция снимает интегрирование по углам, давая в результате θ-функцию треугольника $\theta_\triangle\left(\sqrt{2ms_1}, \sqrt{2ms_2}, Q\right)$:

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \frac{m\,\theta_\triangle\left(\sqrt{2ms_1}, \sqrt{2ms_2}, Q\right)}{2\pi^2\sqrt{4s_1s_2 - (s_1 + s_2 - Q^2/2m)^2}}$$

Спектральная плотность свободной частицы

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Действительно, интеграл по dk^2 берется сразу за счет первой δ-функции, а вторая δ-функция снимает интегрирование по углам, давая в результате θ-функцию треугольника $\theta_\triangle(k_1, k_2, Q)$:

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \frac{m^2\, \theta_\triangle(k_1, k_2, Q)}{\pi^2 \sqrt{4k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2 - Q^2)^2}}\,,$$

с векторами $k_1 \equiv \sqrt{2ms_1}$ и $k_2 \equiv \sqrt{2ms_2}$.

Спектральная плотность свободной частицы

Явный вид $\theta_{\triangle}(k_1, k_2, k_3)$ не сложен:

$$\theta_{\triangle}(k_1, k_2, k_3) \equiv \theta(|k_1 + k_2| \geq k_3)\,\theta(k_3 \geq |k_1 - k_2|)$$

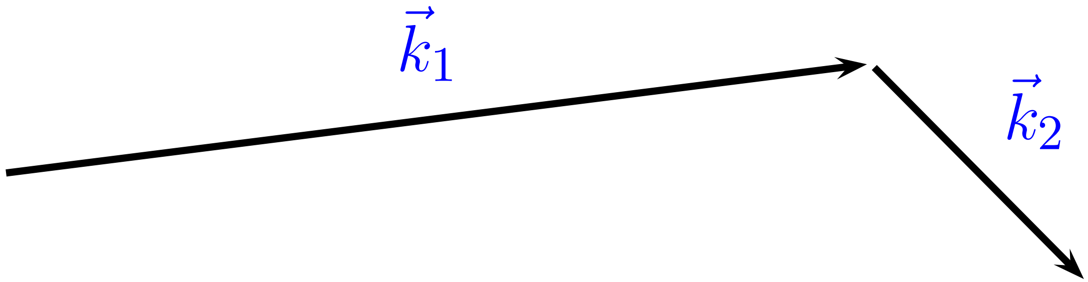
Эта θ-функция гарантирует возможность построения треугольника

Спектральная плотность свободной частицы

Явный вид $\theta_{\triangle}(k_1, k_2, k_3)$ не сложен:

$$\theta_{\triangle}(k_1, k_2, k_3) \equiv \theta\left(|k_1 + k_2| \geq k_3\right)\theta\left(k_3 \geq |k_1 - k_2|\right)$$

Эта θ-функция гарантирует возможность построения треугольника

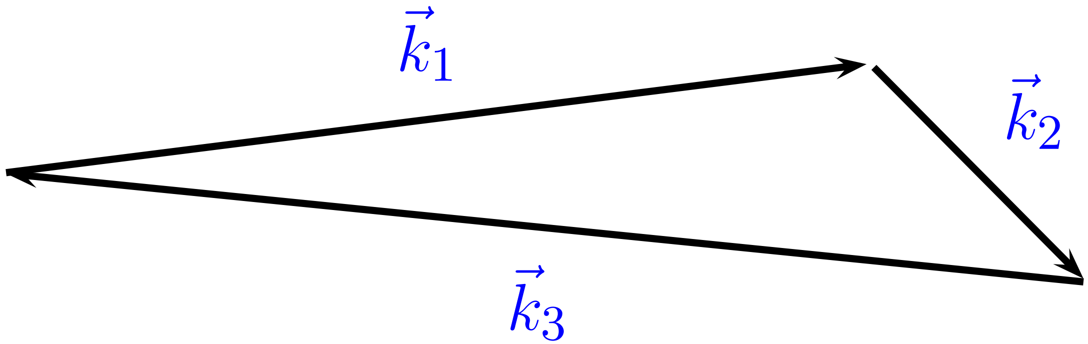


Спектральная плотность свободной частицы

Явный вид $\theta_\triangle(k_1, k_2, k_3)$ не сложен:

$$\theta_\triangle(k_1, k_2, k_3) \equiv \theta(|k_1 + k_2| \geq k_3)\, \theta(k_3 \geq |k_1 - k_2|)$$

Эта θ-функция гарантирует возможность построения треугольника



из трех векторов $\vec{k_1}$, $\vec{k_2}$ и $\vec{k_3}$ с длинами k_1, k_2 и k_3.

Итак: $$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \frac{m^2\, \theta_\triangle(k_1, k_2, Q)}{4\pi^2\, S_\triangle(k_1, k_2, Q)}$$

Спектральная плотность свободной частицы

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

$$= \frac{m^2\, \theta_\triangle\,(k_1, k_2, Q)}{\pi^2 \sqrt{4k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2 - Q^2)^2}}\,.$$

Небольшое отступление о пользе интегральных представлений.

Вопрос: чему равна $\rho_0(s_1, s_2, Q^2)$ при $Q^2 = 0$?

Спектральная плотность свободной частицы

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right) \quad (*)$$

$$= \frac{m^2\, \theta_\triangle\,(k_1, k_2, Q)}{\pi^2 \sqrt{4k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2 - Q^2)^2}}\,. \quad (**)$$

Небольшое отступление о пользе интегральных представлений.

Вопрос: чему равна $\rho_0(s_1, s_2, Q^2)$ при $Q^2 = 0$?

Ответ: из $(*)$ сразу получим $\rho_0(s_1, s_2, 0) = C \cdot \delta(s_1 - s_2)$,

где константа $C = \displaystyle\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) = \frac{m}{2\pi}$.

Коррелятор осциллятора

Для осциллятора функция Грина известна

$$G_{\rm osc}(\,x,\;1/i\mu\,|\,0,\;0) \;=\; \frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega/\mu)}\exp\left(-\frac{m\omega\vec{x}^2\cosh(\omega/\mu)}{2\sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Коррелятор осциллятора

Для осциллятора функция Грина известна

$$G_{\text{osc}}(\,x,\,1/i\mu\,|\,0,\,0) \;=\; \frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega/\mu)}\exp\left(-\frac{m\omega\vec{x}^{2}\cosh(\omega/\mu)}{2\sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Коррелятор $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \int G_{\text{osc}}(\,x,\,1/i\mu_1\,|\,0,\,0\,)\,G^{*}_{\text{osc}}(\,x,\,1/i\mu_2\,|\,0,\,0\,)\,e^{iQx}\,d^2x$$

Коррелятор осциллятора

Для осциллятора функция Грина известна

$$G_{\rm osc}(\,x,\;1/i\mu\,|\,0,\;0) \;=\; \frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega/\mu)}\exp\left(-\frac{m\omega\vec{x}^2\cosh(\omega/\mu)}{2\sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Коррелятор $M_{\rm osc}(Q^2,\mu_1,\mu_2) =$

$$= \frac{m^2\omega^2}{(2\pi)^2\sinh(\omega/\mu_1)\sinh(\omega/\mu_2)}\int d^2x\, e^{-m(\omega_1+\omega_2)x^2/2+iQx}$$

с естественными обозначениями $\omega_i \equiv \dfrac{\omega\cosh(\omega/\mu_i)}{\sinh(\omega/\mu_i)}$.

Коррелятор осциллятора

Для осциллятора функция Грина известна

$$G_{\text{osc}}(\,x,\;1/i\mu\,|\,0,\;0) \;=\; \frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega/\mu)}\exp\left(-\frac{m\omega\vec{x}^2\cosh(\omega/\mu)}{2\sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Коррелятор $M_{\text{osc}}(Q^2,\mu_1,\mu_2) =$

$$= \frac{m^2\omega^2}{(2\pi)^2\sinh(\omega/\mu_1)\sinh(\omega/\mu_2)}\int d^2x\, e^{-m(\omega_1+\omega_2)x^2/2+iQx}$$

$$= \frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega/\mu_1+\omega/\mu_2)}\exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega}\frac{\sinh(\omega/\mu_1)\sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1+\omega/\mu_1)}\right)$$

Точный коррелятор осциллятора

Итак $M_{\rm osc}(Q^2,\mu_1,\mu_2) =$

$$= \frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega/\mu_1+\omega/\mu_2)}\exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega}\frac{\sinh(\omega/\mu_1)\sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1+\omega/\mu_2)}\right)\,.$$

Точный коррелятор осциллятора

Итак $M_{\rm osc}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)} \exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega} \frac{\sinh(\omega/\mu_1) \sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)}\right) .$$

Что мы хотим извлечь из этого точного результата?

Точный коррелятор осциллятора

Итак $M_{\rm osc}(Q^2,\mu_1,\mu_2) =$

$$= \frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega/\mu_1+\omega/\mu_2)}\exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega}\frac{\sinh(\omega/\mu_1)\sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1+\omega/\mu_2)}\right)\,.$$

Что мы хотим извлечь из этого точного результата?
Во-первых, мы хотим получить спектральное разложение:

$$M^{\rm spec}(Q^2,\mu,\mu) = \frac{m\omega}{\pi}\left[F_{00}(Q^2)\,\mathcal{E} + \sum_{n\geq 1} F_n(Q^2)\,\mathcal{E}^{n+1}\right]\,,$$

где $\mathcal{E}\equiv e^{-2\omega/\mu}$, а $F_n(Q^2)$ определяются формфакторами высших состояний: $F_n(Q^2) = \sum\limits_{0\leq k\leq n} F_{n-k,k}(Q^2)$.

Точный коррелятор осциллятора

$$M_{\rm osc}(Q^2,\mu,\mu) = \frac{m\omega}{2\pi\,\sinh(2\omega/\mu)}\,\exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\tanh\left(\frac{\omega}{\mu}\right)\right]\,.$$

Воспользуемся разложением $\dfrac{1}{2\,\sinh(\omega)} = \sum\limits_{k\geq 0} e^{-\omega(2k+1)}$,

запишем первый фактор в виде $\dfrac{1}{2\,\sinh(2\omega/\mu)} = \sum\limits_{k\geq 0} \mathcal{E}^{(2k+1)}$

с $\mathcal{E}\equiv e^{-2\omega/\mu}$ и представим

$$\tanh(\omega/\mu) = \frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}} = 1 + 2\sum_{j\geq 1}(-1)^j\mathcal{E}^j\,.$$

Точный коррелятор осциллятора

Получаем: $M_{\rm osc}(Q^2,\mu,\mu) =$

$$= \frac{m\omega}{\pi}\exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\right]\mathcal{E}\left[1+\sum_{k\geq 1}\mathcal{E}^{2k}\right]\exp\left[-\frac{Q^2}{2m\omega}\sum_{j\geq 1}(-1)^j\mathcal{E}^j\right]$$

$$= \frac{m\omega}{\pi}\left[F_{00}(Q^2)\,\mathcal{E}+\sum_{n\geq 1}F_n(Q^2)\,\mathcal{E}^{n+1}\right].$$

Отсюда сразу извлекаем точный формфактор основного состояния осциллятора:

$$F_{00}(Q^2) = \exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\right].$$

Модель вклада высших состояний

Во-вторых, мы можем получить точное выражение для вклада высших состояний:

$$M^{\text{h.s.}}(Q^2,\mu,\mu) = M_{\text{osc}}(Q^2,\mu,\mu) - \frac{m\omega}{\pi}\,F_{00}(Q^2)\,e^{-2\omega/\mu} =$$

$$= M_{\text{osc}}(Q^2,\mu,\mu) - \frac{m\omega}{\pi}\,\exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega} - \frac{2\omega}{\mu}\right].$$

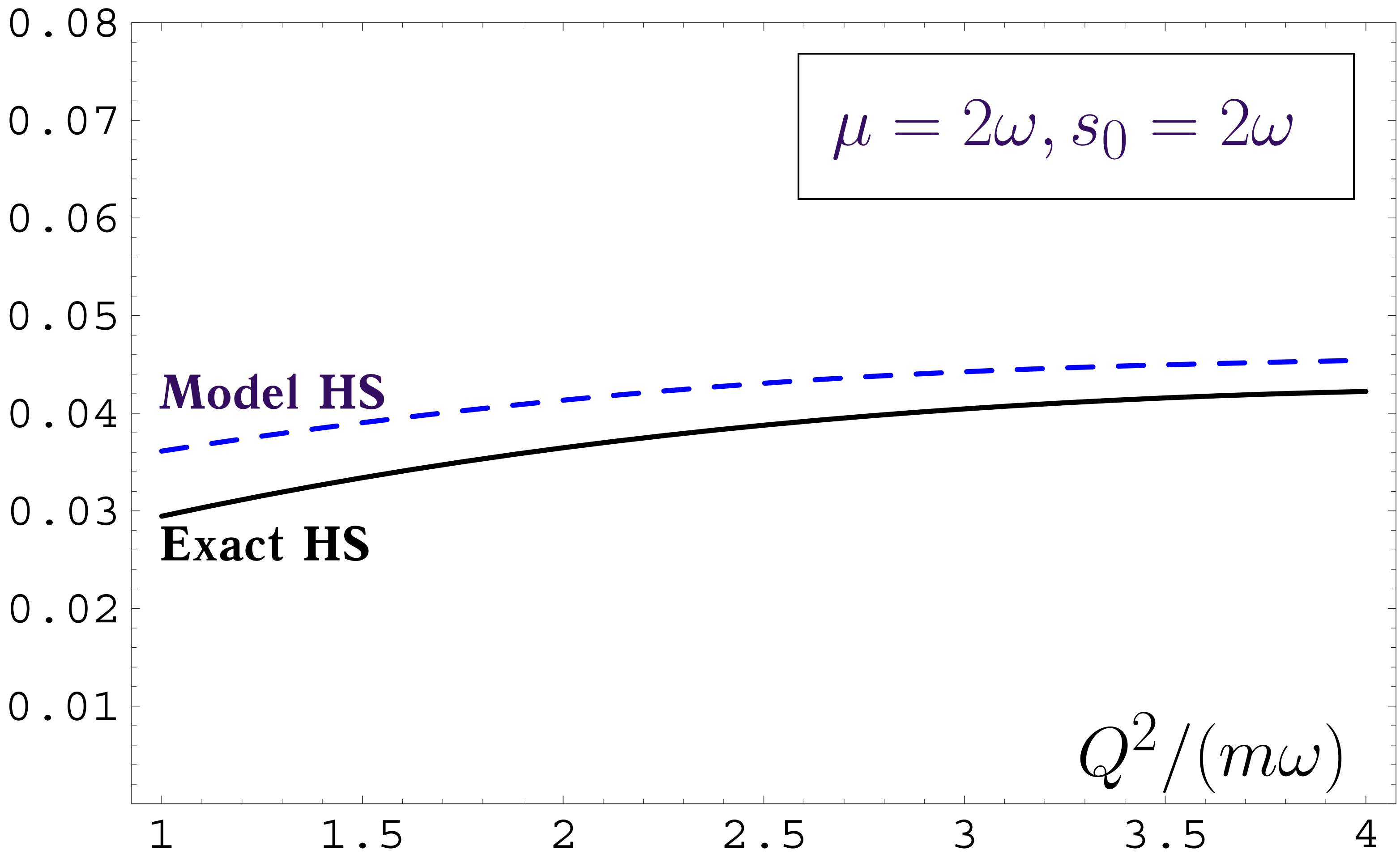
и сравнить его с моделью

$$M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2,\mu,\mu) = \iint e^{-(s_1+s_2)/\mu}\rho_0(s_1,s_2,Q^2)\,ds_1\,ds_2\,,$$

где интегрирование ведется вне квадрата $(0,s_0)\times(0,s_0)$.

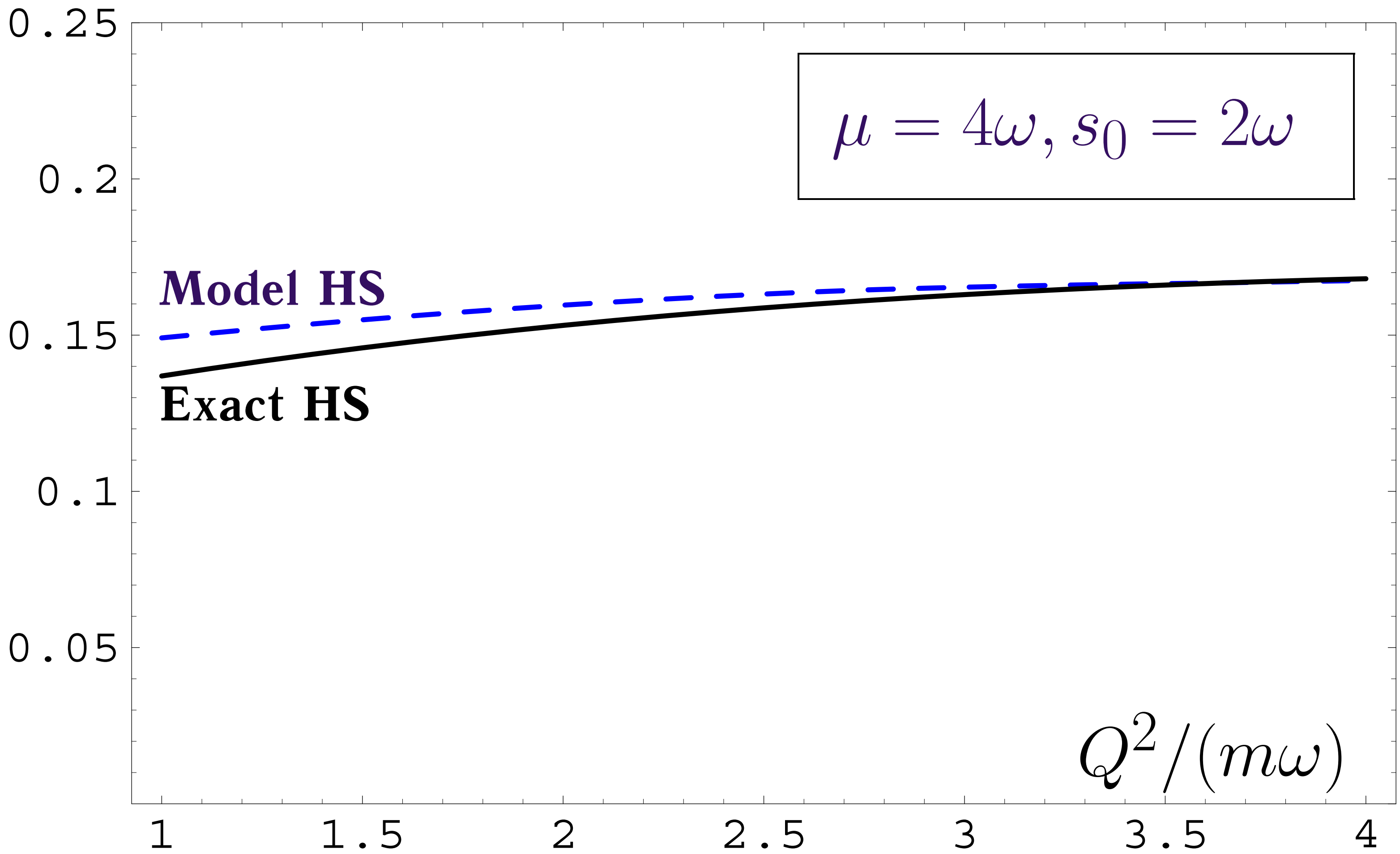
Модель вклада высших состояний

Посмотрим на графики:



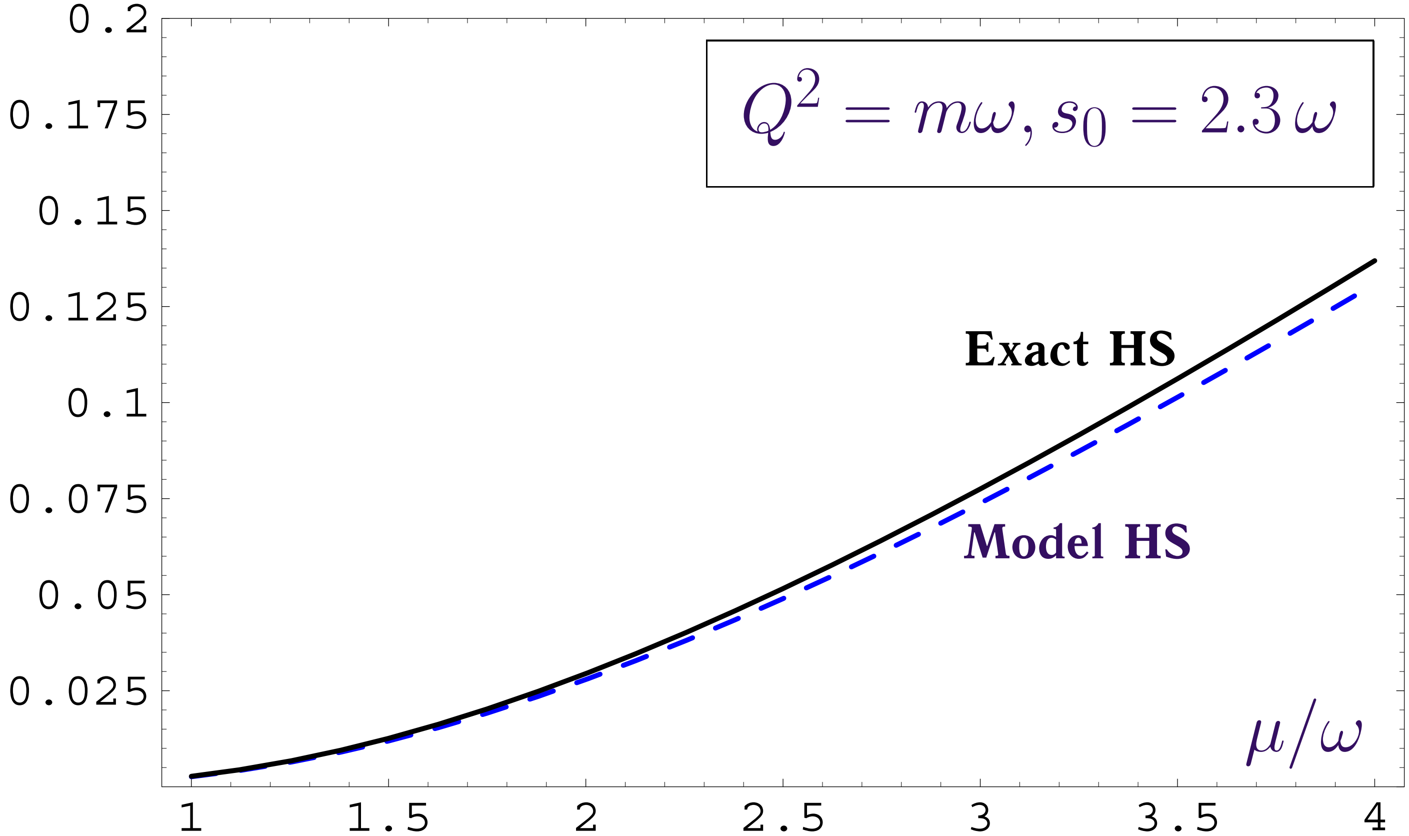
Модель вклада высших состояний

Посмотрим на графики:



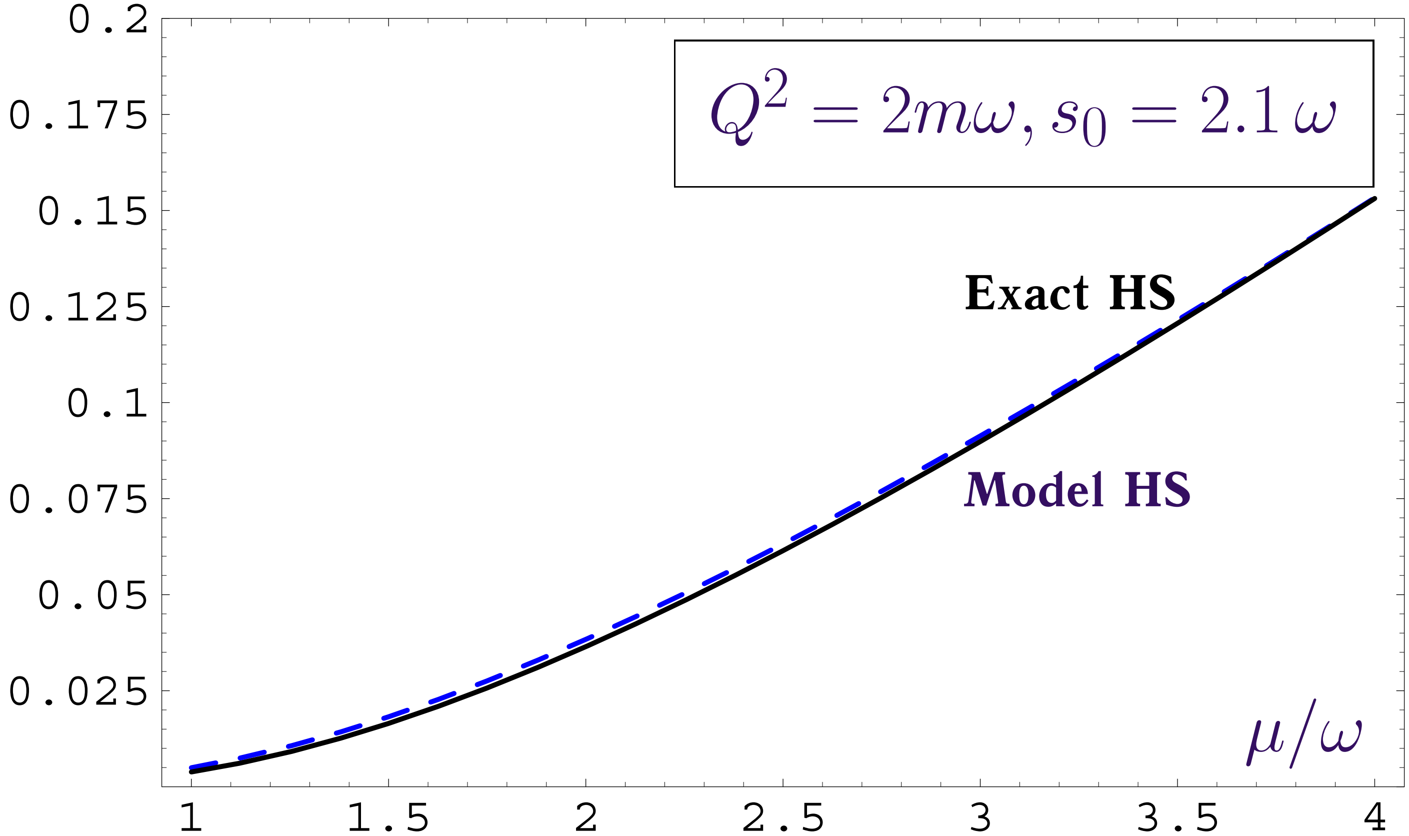
Модель вклада высших состояний

Мы видим, что порог $s_0 = 2\omega$ хорош не для всех значений Q^2 и μ. В наших силах его подправить: для меньших значений Q^2 он должен стать побольше, чтобы уменьшить $M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)$. Посмотрим на графики:



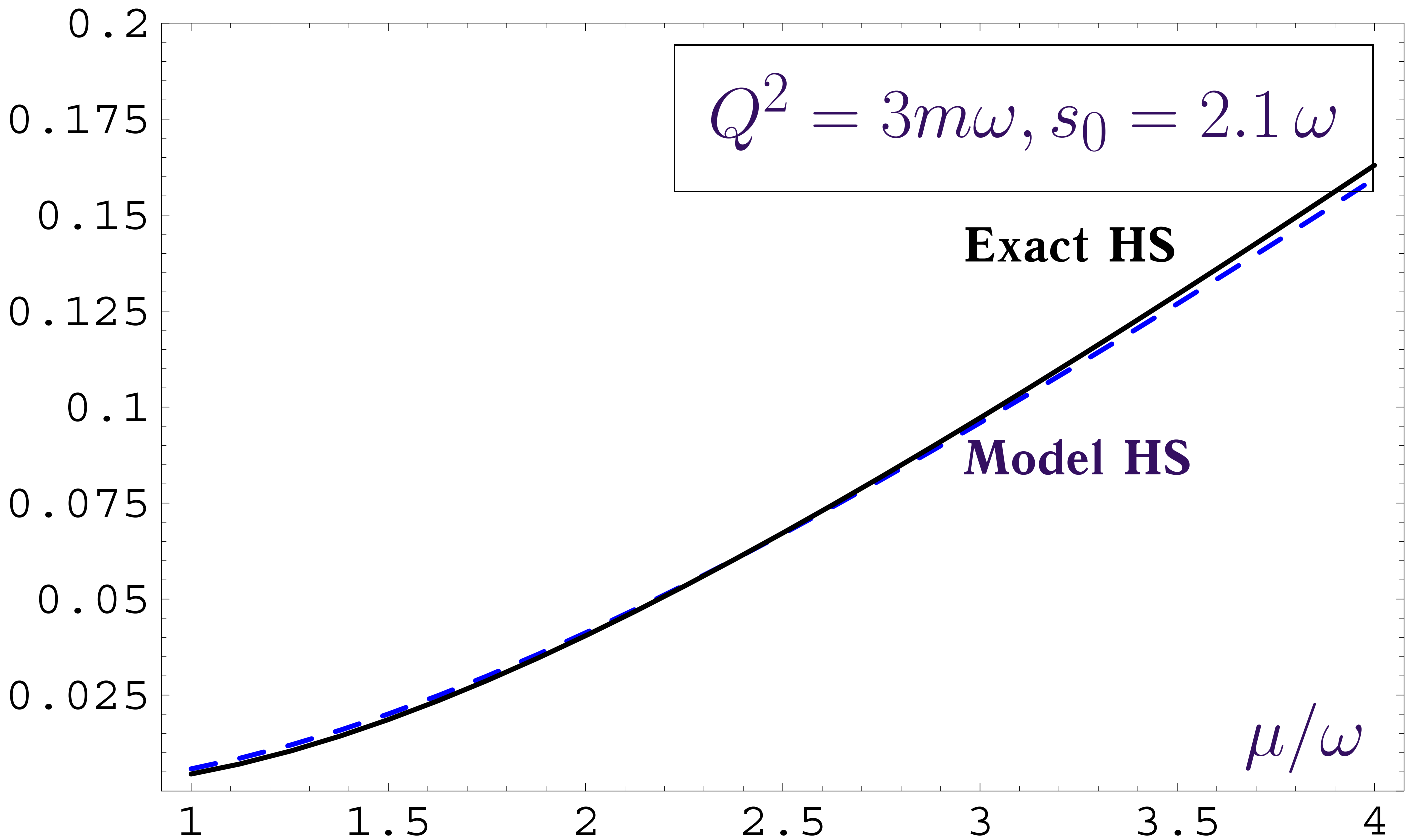
Модель вклада высших состояний

Мы видим, что порог $s_0 = 2\omega$ хорош не для всех значений Q^2 и μ. В наших силах его подправить: для меньших значений Q^2 он должен стать побольше, чтобы уменьшить $M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)$. Посмотрим на графики:



Модель вклада высших состояний

Мы видим, что порог $s_0 = 2\omega$ хорош не для всех значений Q^2 и μ. В наших силах его подправить: для меньших значений Q^2 он должен стать побольше, чтобы уменьшить $M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)$. Посмотрим на графики:



Спектральная модель коррелятора

Итак, формфактор осциллятора имеет вид:

$$F_{00}(Q^2) = \exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\right] .$$

Кроме того, мы строим спектральную модель коррелятора

$$M^{\text{spec}}(Q^2,\mu,\mu) = \frac{m\omega}{\pi}\, F_{00}(Q^2)\, e^{-2\omega/\mu}$$

$$+ \left(\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty - \int_0^{s_0}\!\!\int_0^{s_0}\right) \rho_0(s_1,s_2,Q^2)\, e^{-(s_1+s_2)/\mu}\, ds_1\, ds_2 \, .$$

Чтобы построить правило сумм, нам осталось построить пертурбативное разложение коррелятора $M_{\text{osc}}(Q^2,\mu,\mu)$ по степеням ω/μ.

Пертурбативное разложение коррелятора

Точный коррелятор

$$M_{\rm osc}(Q^2,\mu,\mu) = \frac{m\omega}{2\pi\sinh(2\omega/\mu)}\exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\tanh\left(\frac{\omega}{\mu}\right)\right].$$

Для получения пертурбативного разложения используем

$$\frac{\sinh(\omega)}{\omega} = 1+\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{120}+O(\omega^6)\,;$$

$$\exp\left[A\left(\frac{\tanh(\omega)}{\omega}-1\right)\right] = 1-\frac{A\,\omega^2}{3}+\left(\frac{2\,A}{15}+\frac{A^2}{18}\right)\omega^4+O\left(\omega^6\right).$$

Пертурбативное разложение коррелятора

Точный коррелятор

$$M_{\rm osc}(Q^2,\mu,\mu) = \frac{m\omega}{2\pi\sinh(2\omega/\mu)}\exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\tanh\left(\frac{\omega}{\mu}\right)\right].$$

Для получения пертурбативного разложения используем

$$\frac{\sinh(\omega)}{\omega} = 1 + \frac{\omega^2}{6} + \frac{\omega^4}{120} + O(\omega^6)\,;$$

$$\exp\left[A\left(\frac{\tanh(\omega)}{\omega} - 1\right)\right] = 1 - \frac{A\,\omega^2}{3} + \left(\frac{2\,A}{15} + \frac{A^2}{18}\right)\omega^4 + O\left(\omega^6\right).$$

Заметим, что нулевой член в разложении воспроизводит просто коррелятор свободной частицы $\dfrac{m\,\mu}{4\pi}e^{-Q^2/4m\mu}$.

Пертурбативное разложение коррелятора

Итак, пертурбативное разложение таково:

$$M_{\text{pert};N}(Q^2,\mu,\mu) = M_0(Q^2,\mu,\mu)\left[1+\sum_{n=1}^{N} C_{2n}\left(\frac{Q^2}{m\,\mu}\right)\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^{2n}\right],$$

где $C_2(z)=\dfrac{z}{12}-\dfrac{2}{3}$ и $C_4(z)=\dfrac{14-4\,z}{45}+\dfrac{z^2}{288}$.

Теперь мы можем выписать явно полученное правило сумм, следующее из приравнивания

$$M^{\text{spec}}(Q^2,\mu,\mu) = M_{\text{pert};2}(Q^2,\mu,\mu)\,.$$

Мы будем использовать $N=2$, поскольку обычно именно так поступают в подходе правилл сумм КХД.

Правила сумм для формфактора осциллятора

Правило сумм: окна доверия

Выпишем явно правило сумм для ФФ осциллятора:

$$F_{00}(Q^2) = \frac{\pi}{m\,\omega} \int_0^{s_0}\!\!\int_0^{s_0} \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, e^{-(s_1+s_2-2\omega)/\mu}\, ds_1\, ds_2$$

$$+ \frac{1}{4}\left[C_2\left(\frac{Q^2}{m\mu}\right)\frac{\omega}{\mu} + C_4\left(\frac{Q^2}{m\mu}\right)\frac{\omega^3}{\mu^3}\right] e^{(2\omega - Q^2/4m)/\mu}\,.$$

Введем безразмерные переменные $M = \mu/\omega$, $q = Q^2/(m\omega)$ и $\sigma_i = s_i/\omega$, определим безразмерную спектральную плотность

$$\tilde{\rho}_0(\sigma_1, \sigma_2, q) = \frac{\theta_\triangle\left(\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \sqrt{q}\right)}{2\pi\sqrt{4\sigma_1\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2 - q)^2}}\,,$$

Правило сумм: окна доверия

и перепишем наше ПС:

$$F_{00}(q) = \int_0^{\sigma_0}\!\!\int_0^{\sigma_0} \tilde{\rho}_0(\sigma_1, \sigma_2, q/2)\, e^{(2-\sigma_1-\sigma_2)/M}\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \frac{e^{(2-q/4)/M}}{4M}\left[C_2\left(\frac{q}{M}\right) + C_4\left(\frac{q}{M}\right)\frac{1}{M^2}\right].$$

Будем называть вклад второй строчки $F_{\rm OPE}(q, M)$ и определим приведенный вклад свободного коррелятора

$$F_{\rm free}(q, M) = \frac{M}{4} e^{(2-q/4)/M},$$

который равен интегралу в первой строке при $\sigma_0 \to \infty$.

Правило сумм: окна доверия

Первый шаг в анализе ПС (**вспомните лекции С. В. Михайлова**) – вопрос об области значений параметра M, в которой этому ПС имеет смысл доверять. Для ее определения введем 2 отношения

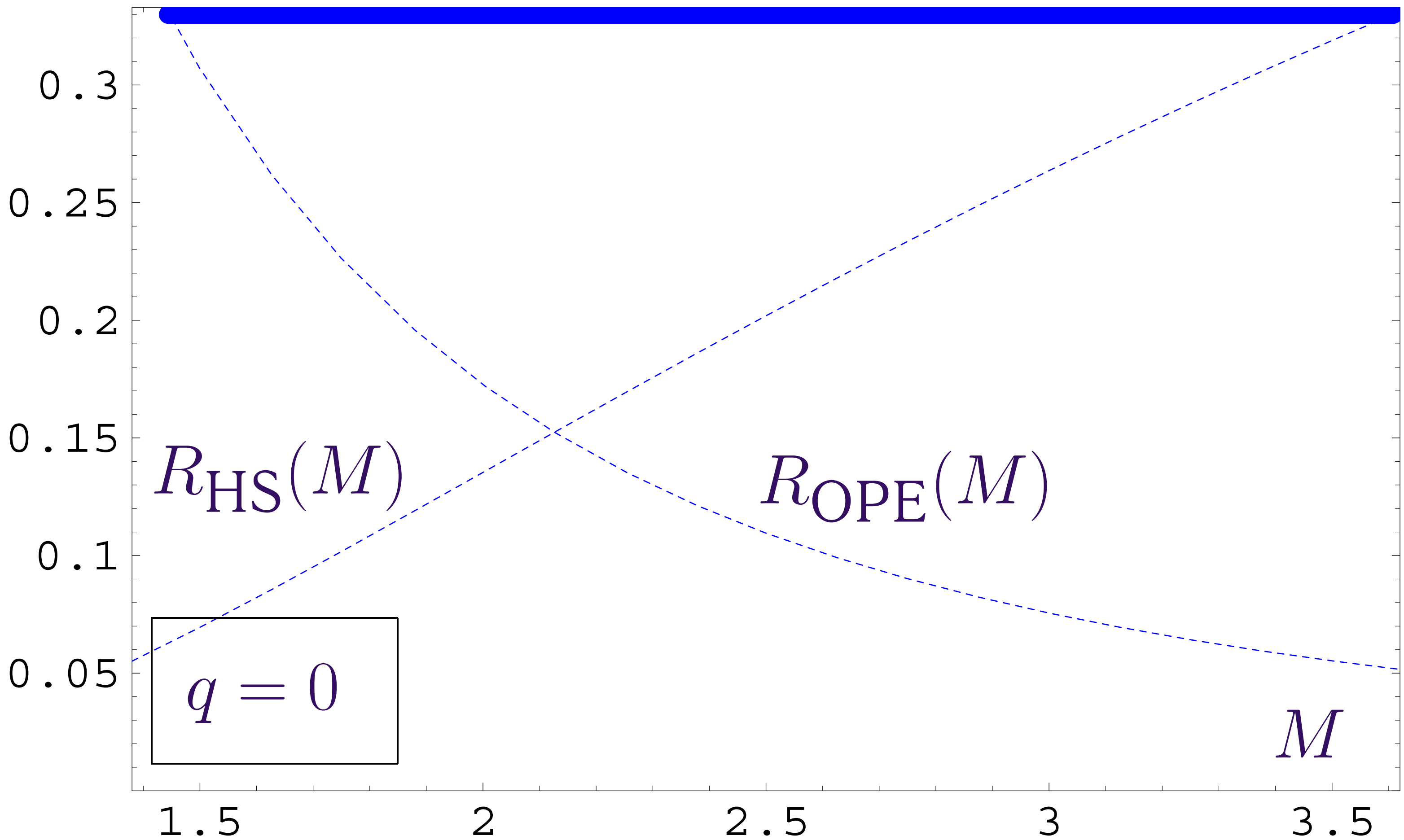
$$R_{\text{OPE}}(q, M) = \frac{F_{\text{OPE}}(q, M)}{F_{\text{free}}(q, M) + F_{\text{OPE}}(q, M)}$$

$$R_{\text{HS}}(q, M) = \frac{M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)}{M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu) + F_{00}(Q^2)\, e^{-2\omega/\mu}}$$

Теперь мы можем найти области, в которых оба отношения меньше $1/3$.

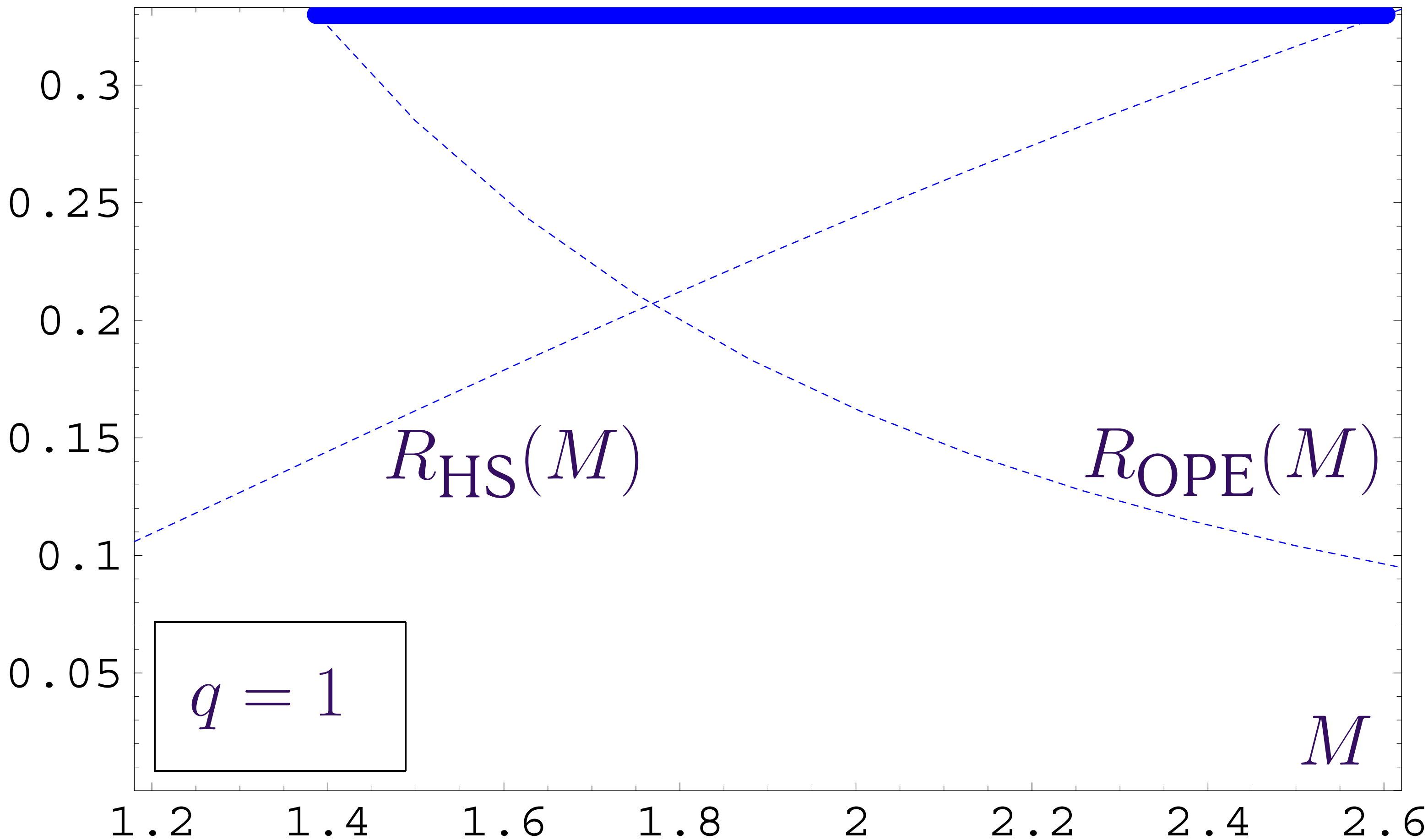
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



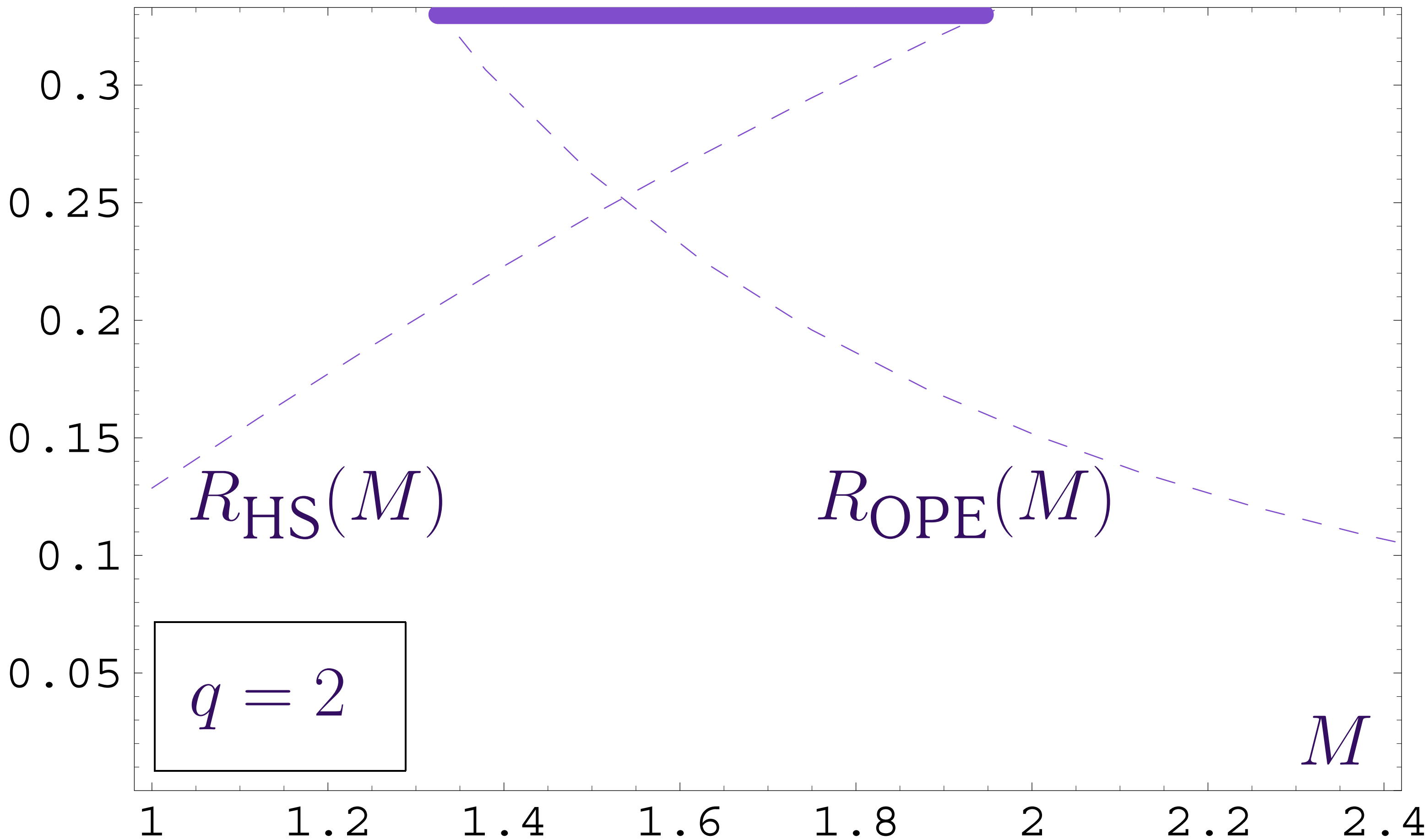
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



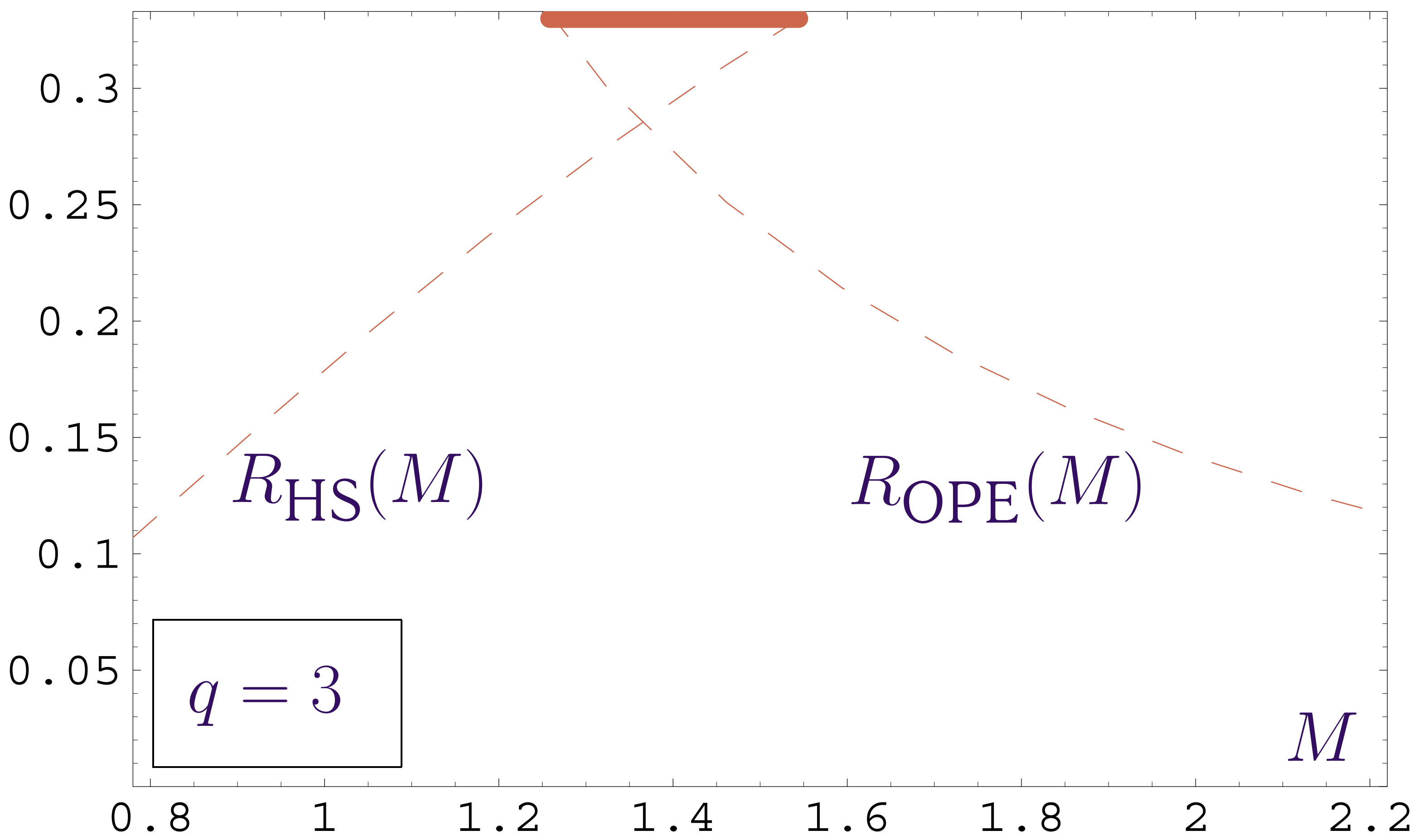
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



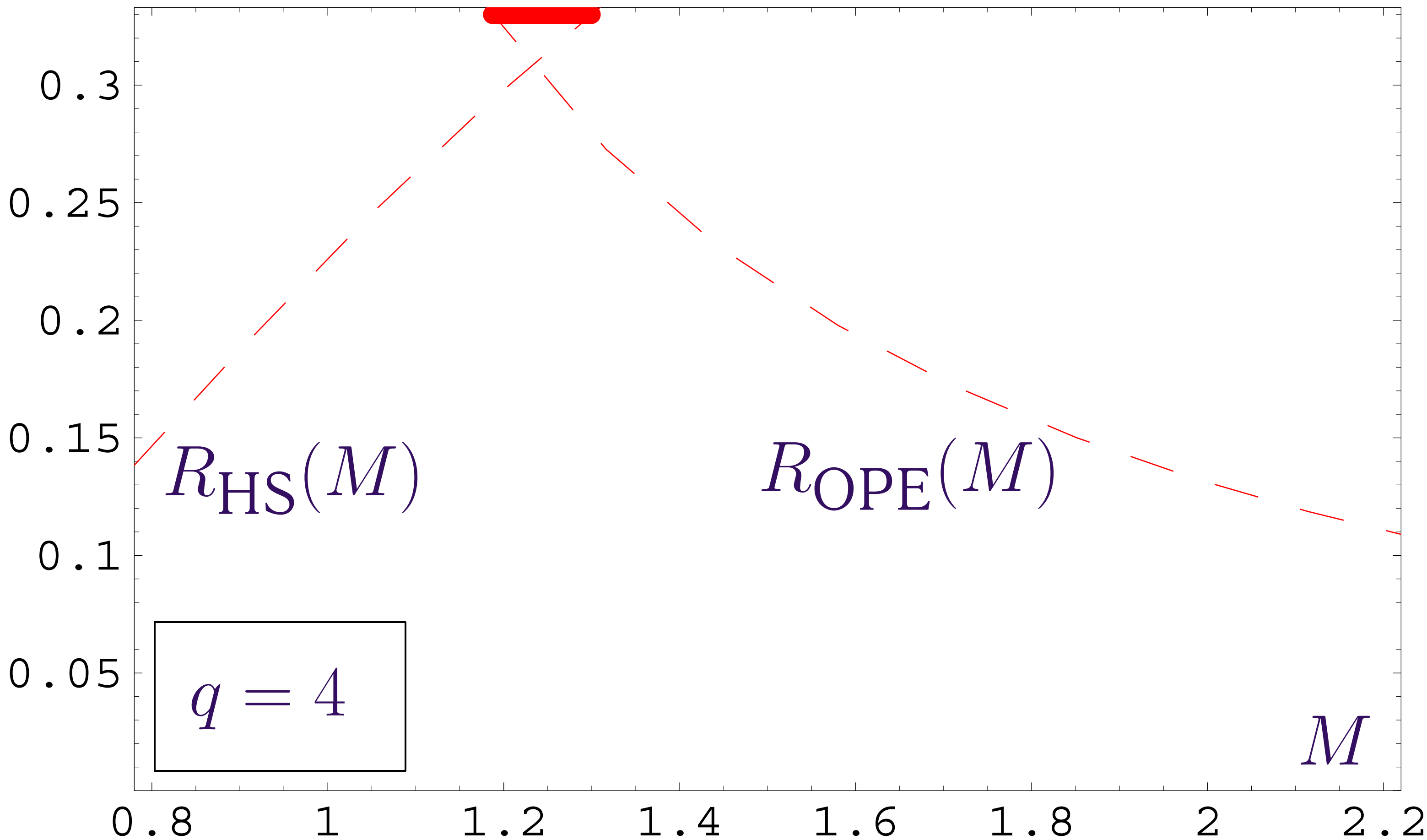
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



Правило сумм: окна доверия

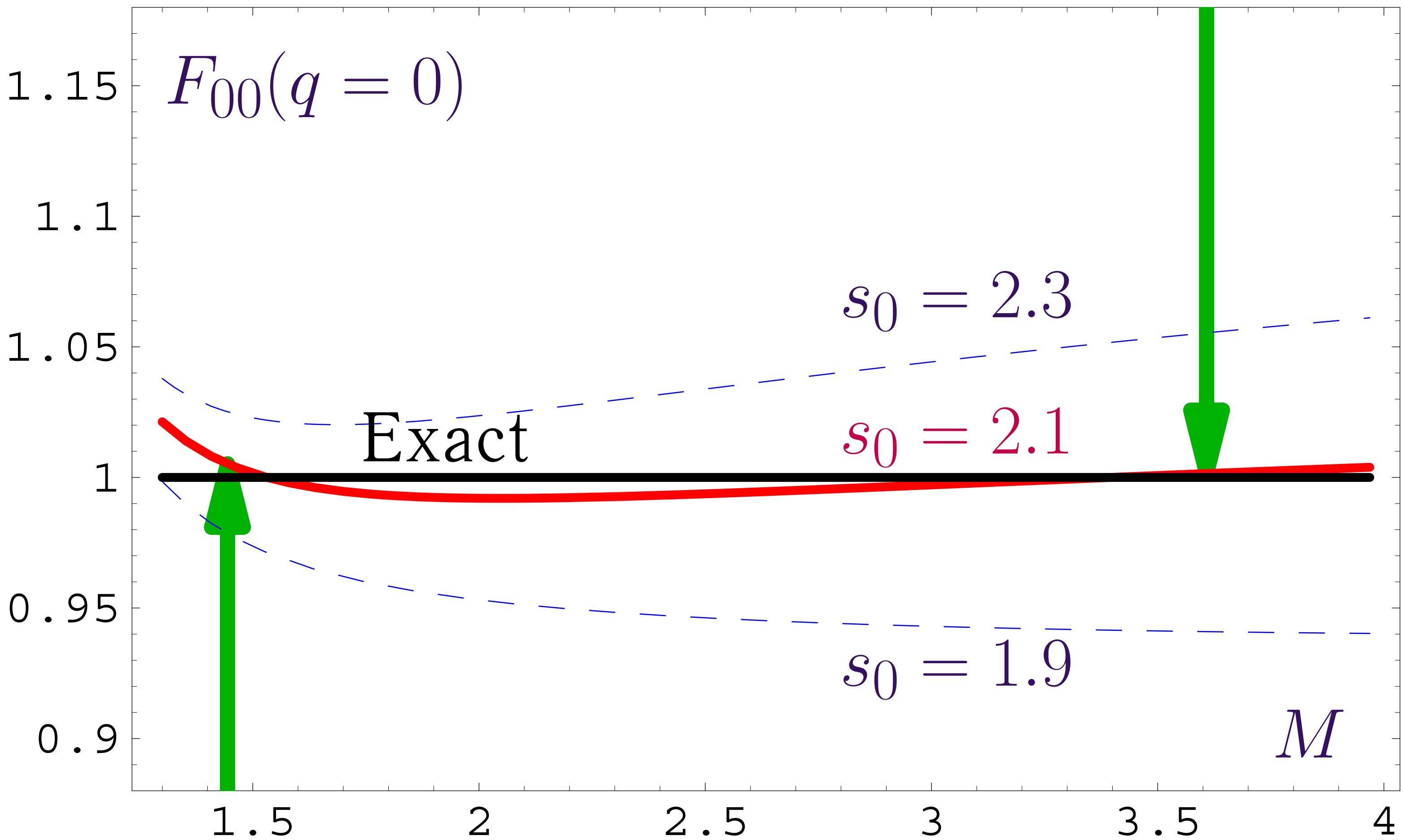
Резюме:

- Для $0 \le q \le 2$ мы имеем широкие “окна доверия” у ПС, что говорит об их хорошем качестве.
- Для $q \ge 3$ окна сужаются и надеяться на хорошую точность трудно.

Результаты обработки ПС подтверждают эти ожидания!

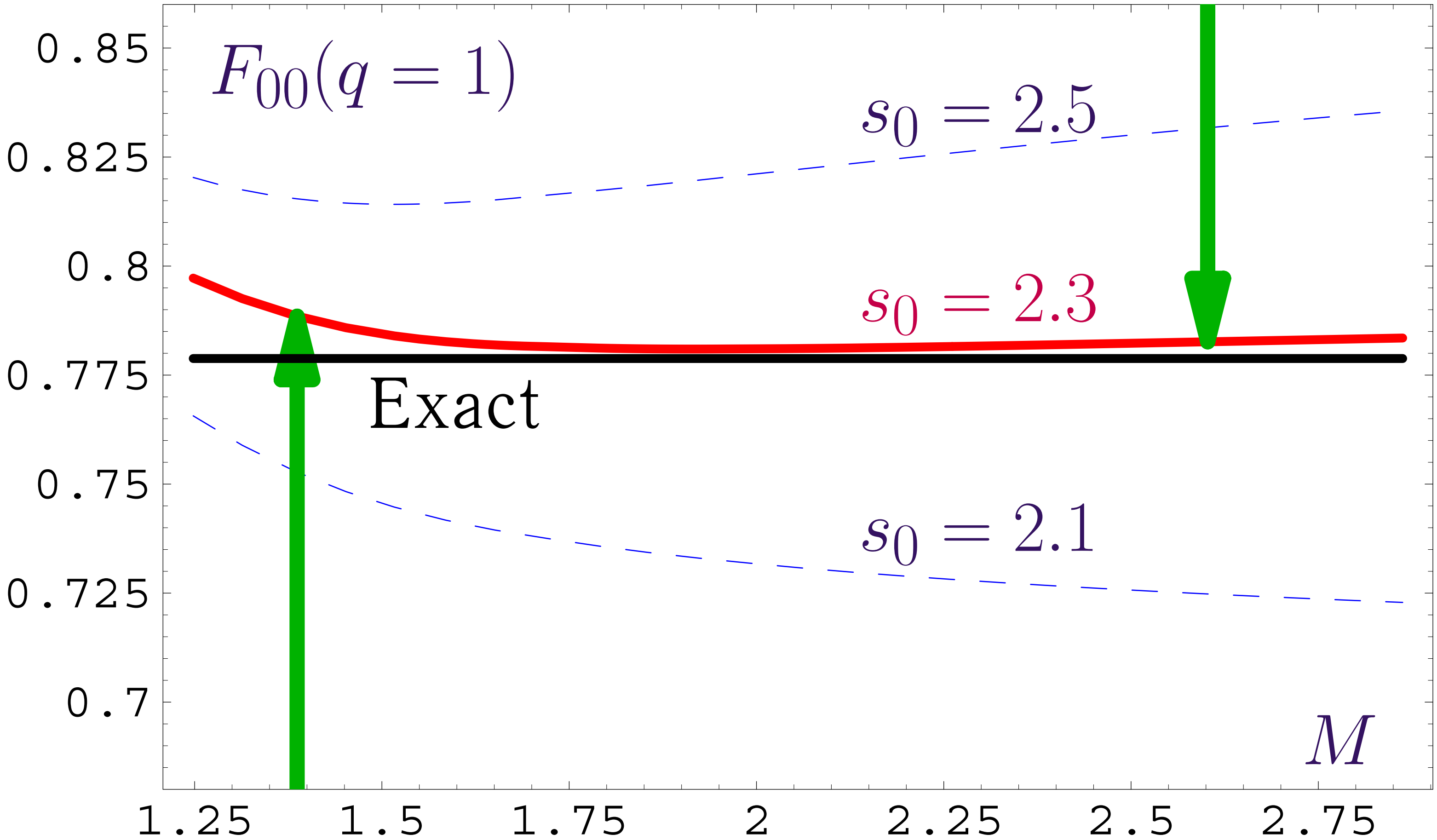
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



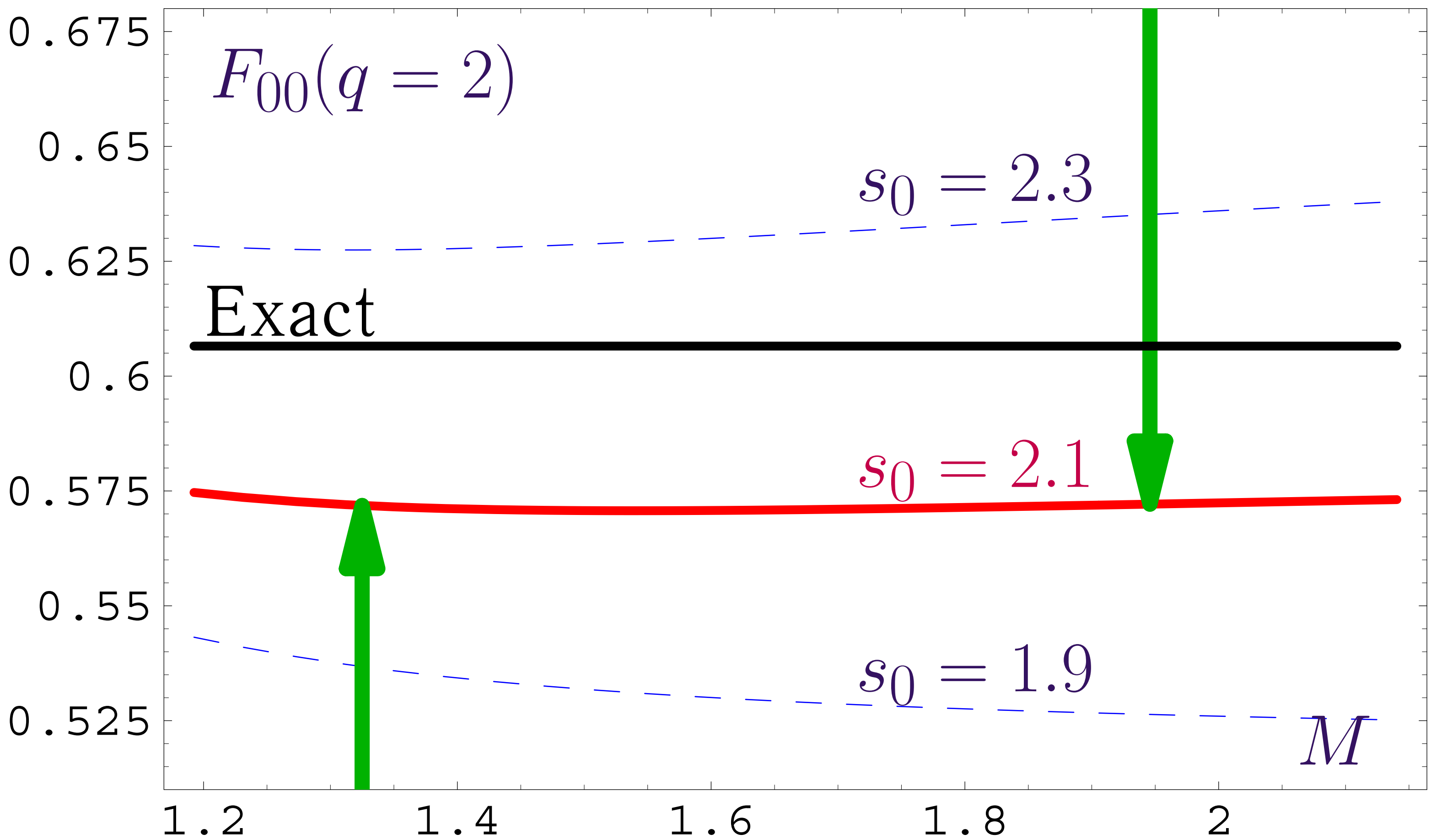
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



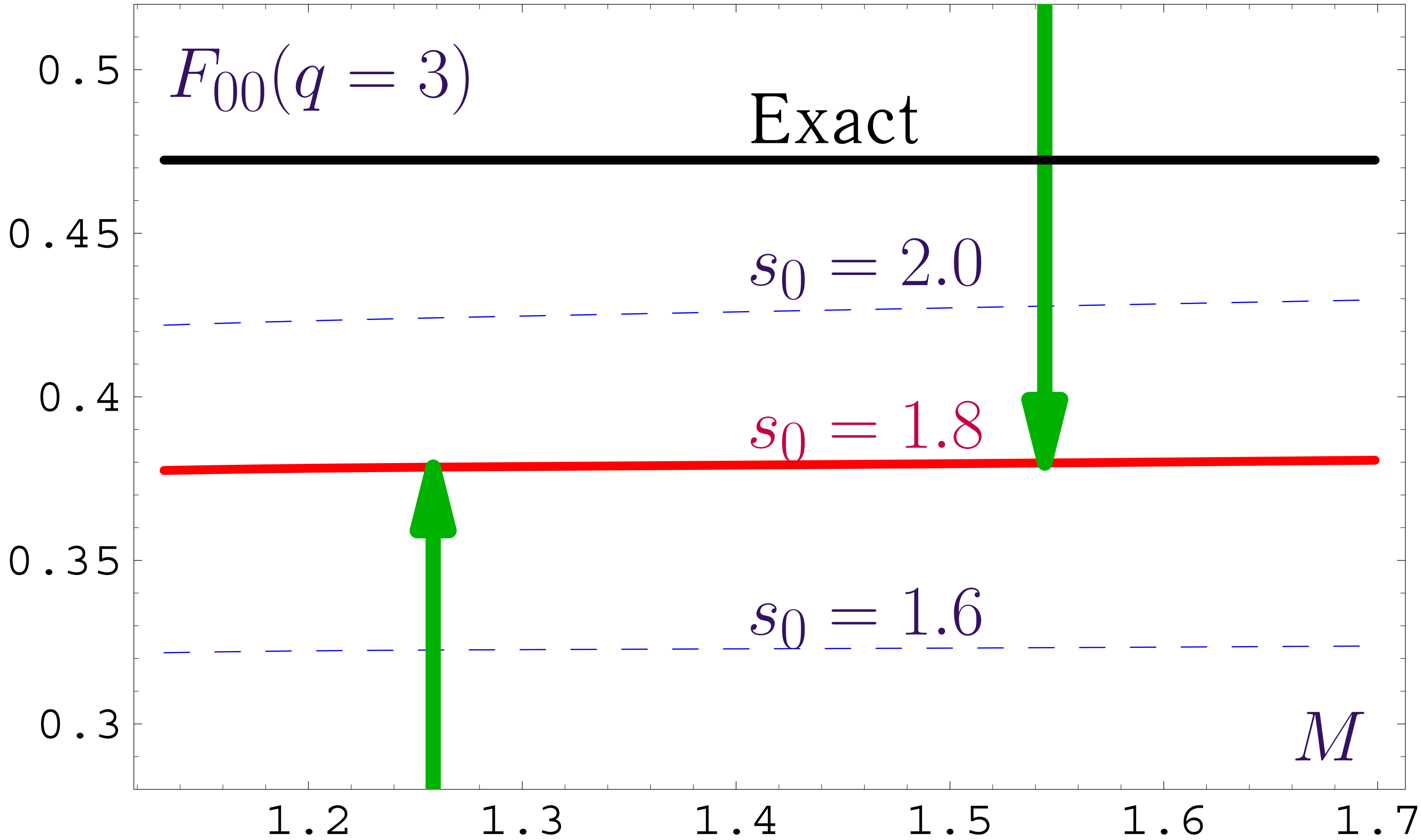
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



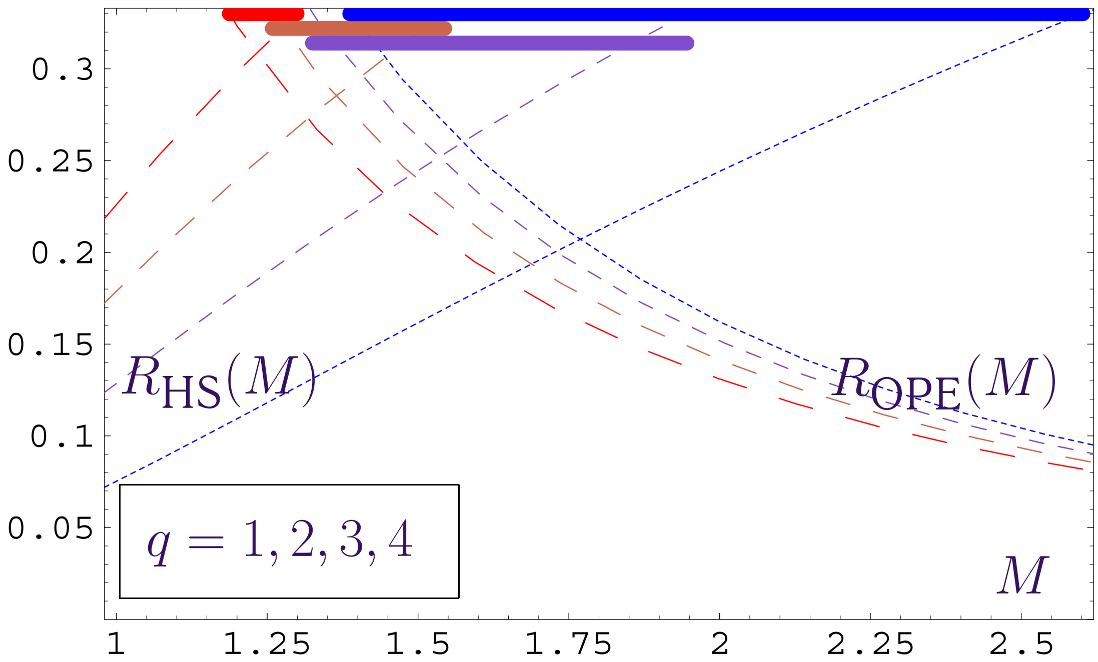
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



Обработка ПС для ФФ осциллятора

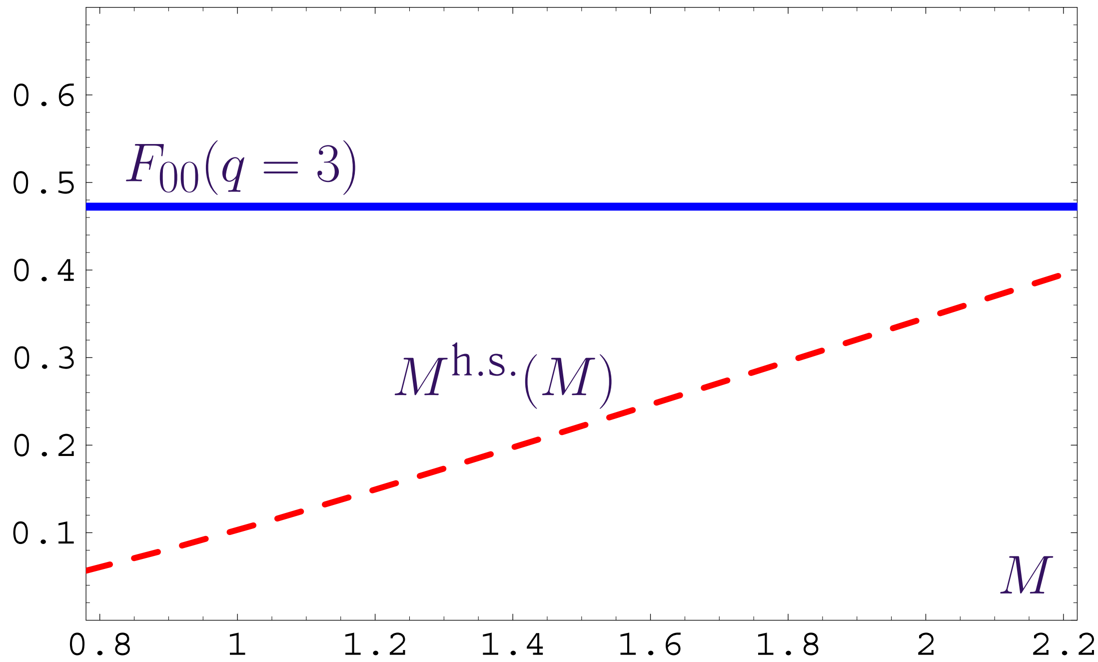
В чем причина плохого поведения ПС при больших $q \geq 3$?
Посмотрим на картинку по “окнам доверия”:



Ясно, что дело в росте вклада высших состояний $R_{\rm HS}(M)$.

Обработка ПС для ФФ осциллятора

В чем причина плохого поведения ПС при больших $q \geq 3$?
А вот сравнение вкладов основного и высших состояний:



Ясно, что дело в росте вклада высших состояний $M^{\text{h.s.}}(q, M)$. Чтобы улучшить ПС надо учитывать вклад следующего состояния с энергией 3ω.

Локальная дуальность для формфактора осциллятора

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

- Оказывается, в подходе “локальной дуальности” (ЛД), разработанном в ОИЯИ А. В. Радюшкиным с соавторами, можно рассчитать ФФ при больших q и без обращения к ПС с двумя состояниями.

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

- Оказывается, в подходе “локальной дуальности” (ЛД), разработанном в ОИЯИ А. В. Радюшкиным с соавторами, можно рассчитать ФФ при больших q и без обращения к ПС с двумя состояниями.
- Идея подхода заключается в том, что в пределе $M \to \infty$ все степенные поправки обращаются в ноль. Единственный параметр, который помнит о степенных поправках, – это s_0. Его фиксируют из борелевских ПС (т.е. с конечными M) или из эксперимента.

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

- Оказывается, в подходе "локальной дуальности" (ЛД), разработанном в ОИЯИ А. В. Радюшкиным с соавторами, можно рассчитать ФФ при больших q и без обращения к ПС с двумя состояниями.
- Идея подхода заключается в том, что в пределе $M \to \infty$ все степенные поправки обращаются в ноль. Единственный параметр, который помнит о степенных поправках, – это s_0. Его фиксируют из борелевских ПС (т.е. с конечными M) или из эксперимента.
- Мы будем фиксировать s_0 из ПС ЛД для $|\psi_0(0)|^2$:

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\text{LD}} = \frac{m\, s_0^{\text{LD}}}{2\pi} = \frac{m\,\omega}{\pi} \quad \text{with} \quad \boxed{s_0^{\text{LD}} = 2\,\omega}$$

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

Для ФФ получаем

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\rm LD} F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega}\rho_0(s_1,s_2,Q^2)\,ds_1\,ds_2\,.$$

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

Для ФФ получаем

$$\{|\psi_0(0)|^2\}_{\text{LD}}\, F_{00}^{\text{LD}}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega} \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, ds_1\, ds_2\,.$$

Рассмотрим его значение при $Q^2 = 0$: мы знаем, что $\rho_0(s_1, s_2, 0) = \dfrac{m}{2\pi}\,\delta\,(s_1 - s_2)$. Поэтому

$$\{|\psi_0(0)|^2\}_{\text{LD}}\, F_{00}^{\text{LD}}(0) = \{|\psi_0(0)|^2\}_{\text{LD}}\,,$$

и, следовательно,

$$\boxed{F_{00}^{\text{LD}}(Q^2 = 0) = 1}$$

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

Для ФФ получаем

$$\{|\psi_0(0)|^2\}_{\rm LD}\, F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega} \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, ds_1\, ds_2\,.$$

Используем интегральное представление

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right)\delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

Для ФФ получаем

$$\{|\psi_0(0)|^2\}_{\rm LD}\, F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega} \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, ds_1\, ds_2\,.$$

Используем интегральное представление

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right)\delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

$$F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \int \frac{d^2k}{4m\,\omega\,\pi}\,\theta\left(2\,\omega - \frac{k^2}{2m}\right)\theta\left(2\,\omega - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)\,.$$

Интеграл берется легко из геометрических соображений.
Кто скажет как?

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

$$= \frac{2}{\pi}\left[\arccos\left(\frac{Q}{4\sqrt{m\,\omega}}\right) - \frac{Q}{4\sqrt{m\,\omega}}\sqrt{1-\frac{Q^2}{16m\,\omega}}\right]\theta\left(16m\,\omega - Q^2\right)$$

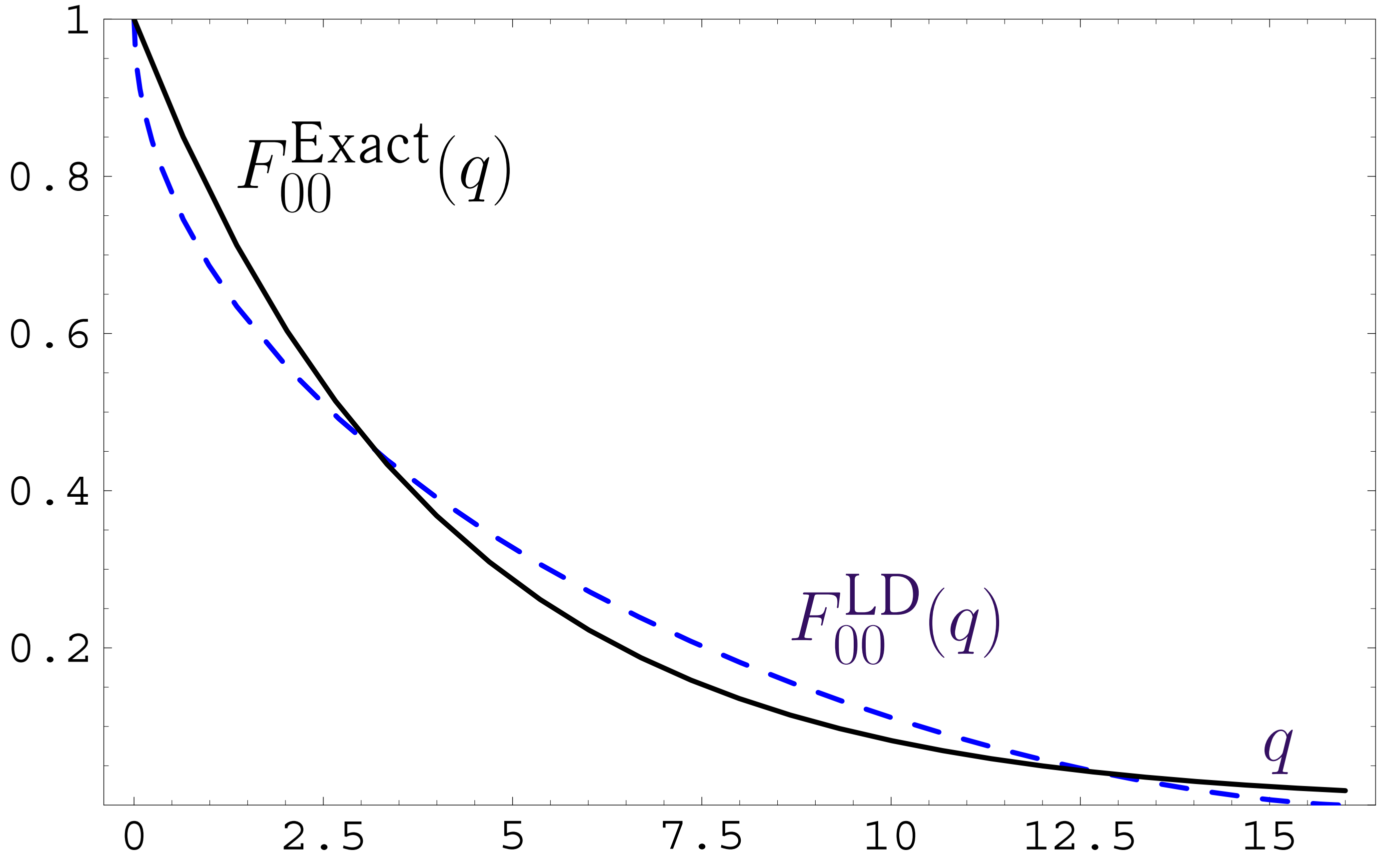
или в безразмерных переменных

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(q) = \frac{2}{\pi}\left[\arccos\sqrt{\frac{q}{16}} - \sqrt{\frac{q}{16}}\sqrt{1-\frac{q}{16}}\right]\theta\left(1-\frac{q}{16}\right).$$

Локальная дуальность: ФФ осциллятора

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(q) = \frac{2}{\pi}\left[\arccos\sqrt{\frac{q}{16}} - \sqrt{\frac{q}{16}}\sqrt{1-\frac{q}{16}}\right]\theta\left(1-\frac{q}{16}\right).$$

Посмотрим сравнение с точным ФФ:



Локальная дуальность и физика за ней

Подход ЛД основан на очень простом физическом приближении:

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(Q^2) = \frac{1}{|\psi_0(0)|^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \theta\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right) \theta\left(s_0 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right) .$$

Локальная дуальность и физика за ней

Подход ЛД основан на очень простом физическом приближении:

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(Q^2) = \frac{1}{|\psi_0(0)|^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \theta\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right) \theta\left(s_0 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right) .$$

Сравним с импульсным представлением точного ФФ

$$F_{00}(Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \Psi_0(k)\Psi_0^*(k+Q)\, .$$

Локальная дуальность и физика за ней

Подход ЛД основан на очень простом физическом приближении:

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(Q^2) = \frac{1}{|\psi_0(0)|^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \theta\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right) \theta\left(s_0 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right) .$$

Сравним с импульсным представлением точного ФФ

$$F_{00}(Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \Psi_0(k) \Psi_0^*(k+Q)\, .$$

Вывод: ЛД эквивалентна приближению

$$\Psi_0(k)^{\mathrm{LD}} = \frac{1}{|\psi_0(0)|} \theta\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{m\,\omega}}\, \theta\left(4m\,\omega - k^2\right) .$$

Локальная дуальность и физика за ней

Вывод: ЛД эквивалентна приближению

$$\Psi_0(k)^{\mathrm{LD}} = \sqrt{\frac{\pi}{m\,\omega}}\,\theta\big(4m\,\omega - k^2\big)$$

для точных ВФ осциллятора

$$\Psi_0(k) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m\,\omega}}\,\exp\left(-\frac{k^2}{2m\,\omega}\right)$$

При этом

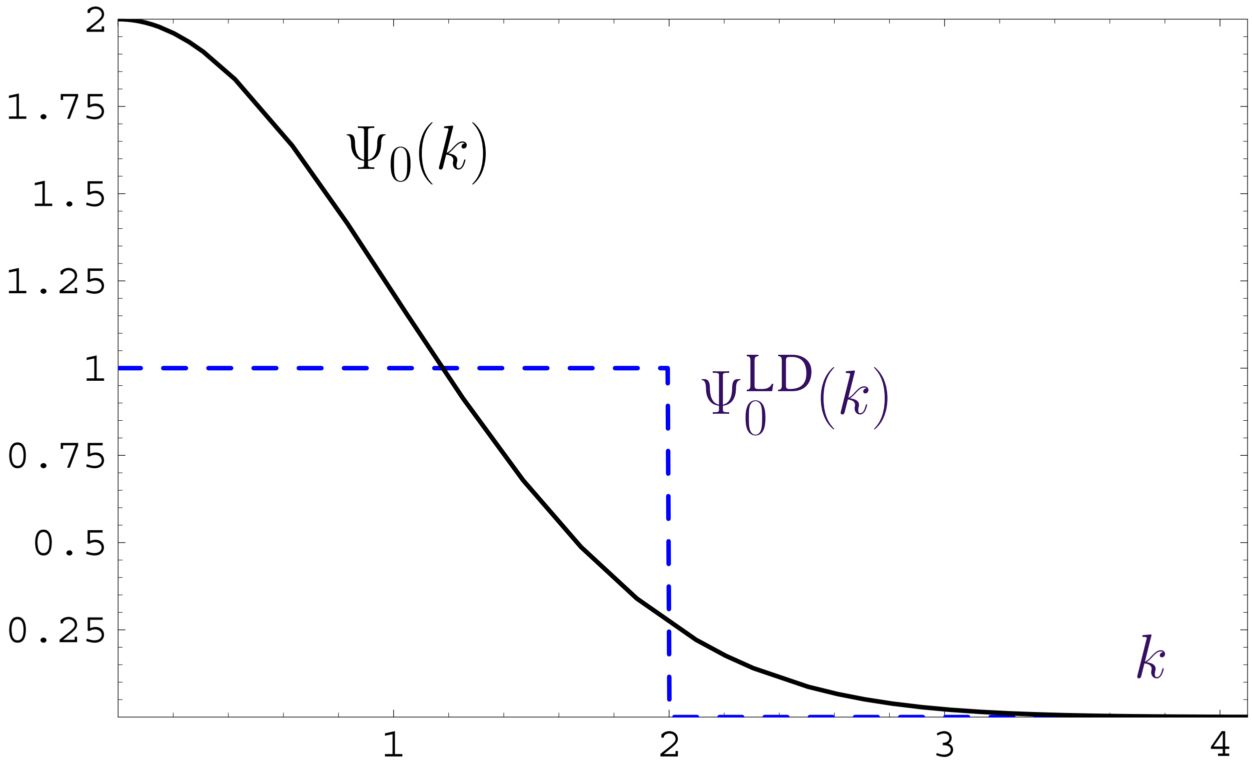
$$\int d^2k\,\Psi_0(k) = \int d^2k\,\Psi_0^{\mathrm{LD}}(k)\,;$$

$$\int d^2k\,k^2\Psi_0(k) = \int d^2k\,k^2\Psi_0^{\mathrm{LD}}(k)\,.$$

Локальная дуальность и физика за ней

$$\int d^2k\,\Psi_0(k) = \int d^2k\,\Psi_0^{\rm LD}(k)\,; \qquad \int d^2k\,k^2\Psi_0(k) = \int d^2k\,k^2\Psi_0^{\rm LD}(k).$$

Посмотрим картинку:

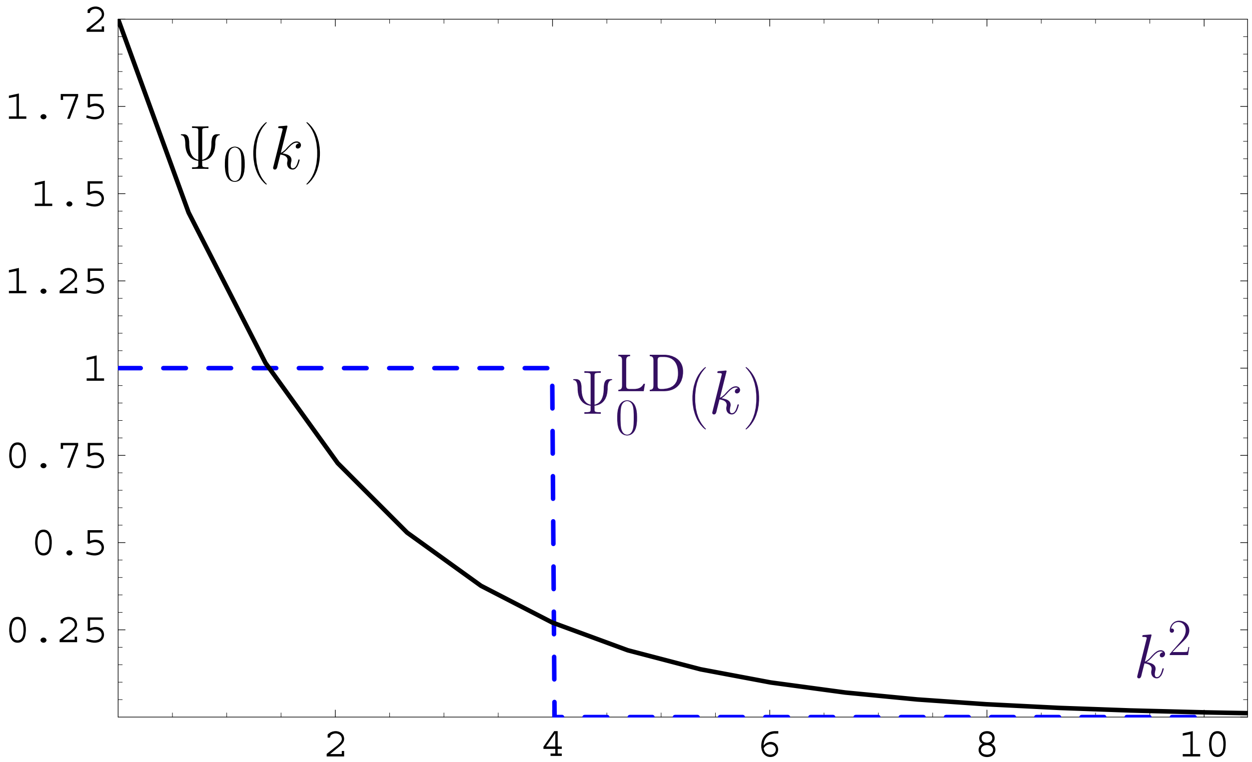


Вопрос:
Равны ли площади под кривыми? Почему нет, если интегралы по d^2k равны?

Локальная дуальность и физика за ней

$$\int d^2k\,\Psi_0(k) = \int d^2k\,\Psi_0^{\rm LD}(k)\,; \qquad \int d^2k\,f(k^2) = \pi\int dk^2\,f(k^2)\,.$$

Посмотрим картинку:



Ответ:

Теперь – равны, так как сейчас абсцисса – k^2!

Лекция закончена!