
Лекция № 5. ПС КХД и факторизация

А. П. Бакулев

ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ (Дубна, Россия)

5 февраля 2005

Содержание

- КХД: кварки внутри, адроны снаружи! Как быть?
- Правила сумм КХД: как можно изучать адроны в непертурбативной КХД, 2-точечный коррелятор для аксиальных токов и пионная константа распада.
- Локальная дуальность для пионной константы распада.
- Правила сумм КХД: 3-точечный коррелятор векторного и двух аксиальных токов и формфактор пиона.
- Локальная дуальность для формфактора пиона и тождество Уорда.
- Факторизация, пионная амплитуда распределения (πAP), ее эволюция в пертурбативной КХД (пКХД)

*Кварки внутри,
Адроны снаружи!
Как быть?*

КХД: лагранжиан, кварки и глюоны

Калибровочно-инвариантный лагранжиан КХД

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{q=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_q (i\hat{D} - m_q)\psi_q \quad (1)$$

содержит только поля глюонов ($G_{\mu\nu}^a(x)$) и кварков ($\psi_q(x)$).

Эти поля имеют цветовые степени свободы: 3 у кварков $\psi_q^A(x)$ ($A = 1, 2, 3$) и 8 у глюонов $G_{\mu\nu}^a(x)$ ($a = 1, \dots, 8$).

Взаимодействие спрятано в ковариантной производной D_μ^{AB}

КХД: лагранжиан, кварки и глюоны

Калибровочно-инвариантный лагранжиан КХД

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{q=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_q (i\hat{D} - m_q)\psi_q \quad (1)$$

содержит только поля глюонов ($G_{\mu\nu}^a(x)$) и кварков ($\psi_q(x)$).

Эти поля имеют цветовые степени свободы: 3 у кварков $\psi_q^A(x)$ ($A = 1, 2, 3$) и 8 у глюонов $G_{\mu\nu}^a(x)$ ($a = 1, \dots, 8$).

Взаимодействие спрятано в ковариантной производной D_μ^{AB}

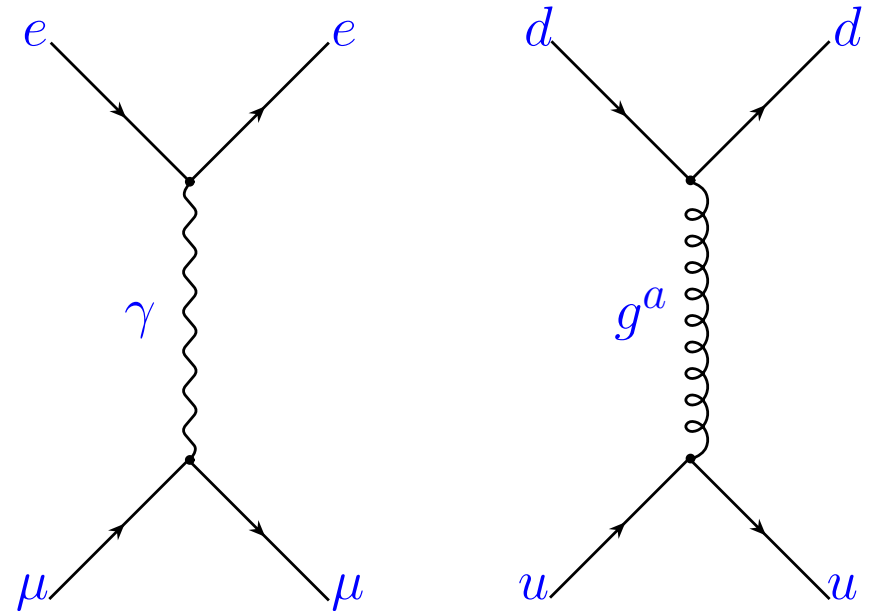
$$D_\mu^{AB} = \partial_\mu - ig_s (t^a)^{AB} A_\mu^a$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Оно нелинейно за счет неабелевости ($f^{abc} \neq 0$).

КХД: цветные глюоны \Rightarrow конфайнмент

Рассмотрим описание $e\mu$ - и qq -рассеяния (d - и u -флейворов): волнистая линия обозначает фотон, а пунктирная – глюон.

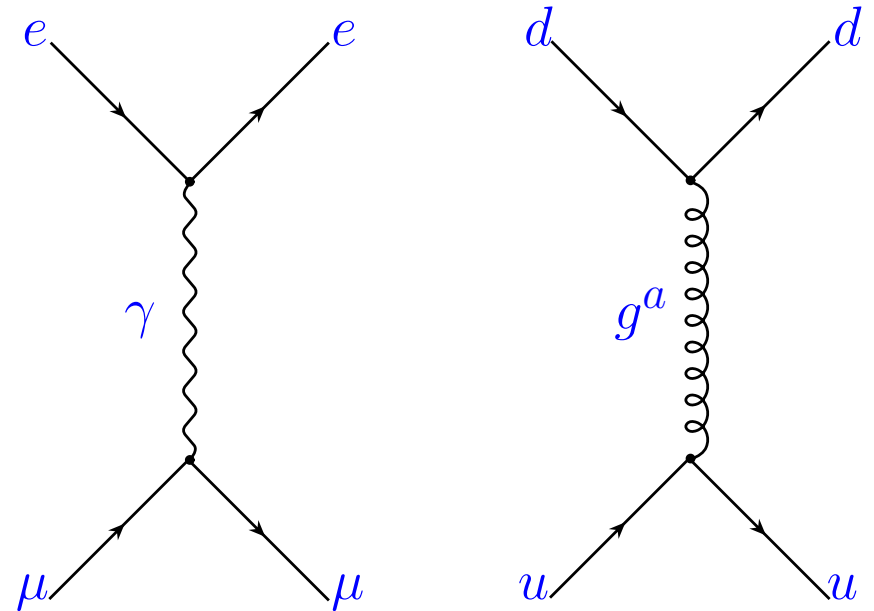


Сравнение:

Параметр	Фотон	Глюон
Масса	0	0
Спин	1	1
Вершина	$e\gamma_\mu$	$g_s\gamma_\mu(t^a)_{ij}$
Заряд	0	$\neq 0$

КХД: цветные глюоны \Rightarrow конфайнмент

Рассмотрим описание $e\mu$ - и qq -рассеяния (d - и u -флейворов): волнистая линия обозначает фотон, а пунктирная – глюон.



Сравнение:

Параметр	Фотон	Глюон
Масса	0	0
Спин	1	1
Вершина	$e\gamma_\mu$	$g_s\gamma_\mu(t^a)_{ij}$
Заряд	0	$\neq 0$

Неабелевость КХД приводит к заряженным (цветным) глюонам. Отсюда – конфайнмент!

Безмассовая КХД: каковы адроны?

PS- и V-мезоны из u - и d -кварков		
тип мезона	PS	V
состав	$\pi^0 [\bar{u}u - \bar{d}d], \pi^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$	$\rho^0(\omega) [\bar{u}u - \bar{d}d], \rho^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$
масса	140 МэВ	770(780) МэВ

Безмассовая КХД: каковы адроны?

PS- и V-мезоны из u - и d -кварков		
тип мезона	PS	V
состав	$\pi^0 [\bar{u}u - \bar{d}d], \pi^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$	$\rho^0(\omega) [\bar{u}u - \bar{d}d], \rho^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$
масса	140 МэВ	770(780) МэВ

Барионы из u - и d -кварков			
состав	$p [uud]$	$n [udd]$	$\Delta^{++} [uuu], \Delta^+ [uud], \Delta^0 [udd], \Delta^- [ddd]$
масса	938 МэВ	939 МэВ	1232 МэВ

Свойства адронов в непертурбативной КХД

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

Метод правил сумм КХД позволяет рассчитывать характеристики адронных состояний (массы, распадные константы, магнитные моменты), но ничего не говорит о самом процессе связывания кварков в адрон (**адронизация, конфайнмент**).

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

Метод правил сумм КХД позволяет рассчитывать характеристики адронных состояний (массы, распадные константы, магнитные моменты), но ничего не говорит о самом процессе связывания кварков в адрон (**адронизация, конфайнмент**).

Предложен в 1977 г. **Шифманом, Вайнштейном и Захаровым (ИТЭФ)** для описания спектра состояний J/ψ -частицы, содержащей c -кварк и открытой в 1974 г. на e^+e^- -коллайдере SPEAR (SLAC) (параллельно была открыта и в $p + Be$ -взаимодействиях в BNL). В 1979 г. применен для описания легких адронов в **безмассовой КХД**.

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

Метод правил сумм КХД позволяет рассчитывать характеристики адронных состояний (массы, распадные константы, магнитные моменты), но ничего не говорит о самом процессе связывания кварков в адрон (**адронизация, конфайнмент**).

Предложен в 1977 г. **Шифманом, Вайнштейном и Захаровым (ИТЭФ)** для описания спектра состояний J/ψ -частицы, содержащей c -кварк и открытой в 1974 г. на e^+e^- -коллайдере SPEAR (SLAC) (параллельно была открыта и в $p + Be$ -взаимодействиях в BNL). В 1979 г. применен для описания легких адронов в **безмассовой КХД**.

Основная идея: посчитать **корреляторы адронных токов** $\langle 0|T [J_1(x)J_2(0)] |0\rangle$ двумя способами. Правило сумм – результат согласования.

КХД ПС: общая схема

Коррелятор адронных токов берется в дисперсионном представлении

$$F_{x \rightarrow q} [\langle 0 | T [J_1(x) J_2(0)] | 0 \rangle] (Q^2) \equiv \Pi (Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho_{12}(s) ds}{s + Q^2}.$$

после чего к нему применяют преобразование Бореля:

$$B_{Q^2 \rightarrow M^2} [\Pi(Q^2)] \equiv \Phi (M^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_{12}(s) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2},$$

которое “давит” вклады высших состояний и способствует улучшению качества правил сумм. Кроме того, оно уничтожает все вычитания в дисперсионном представлении.

КХД ПС: общая схема

1-ый способ: операторное разложение с учетом наличия конденсатов кварковых и глюонных полей в КХД-вакууме

$$\Phi(Q^2) = \Phi_{\text{pert}}(Q^2) + c_{GG} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\rangle + c_{\bar{q}q} \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$$

Здесь $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\rangle = 0.012 \text{ ГэВ}^4$, $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 = 0.0018 \text{ ГэВ}^6$.

2-ой способ: феноменологическое насыщение спектральной плотности адронными состояниями

$$\rho_{\text{had}}(s) = f_h^2 \delta(s - m_h^2) + \rho_{\text{pert}}(s) \theta(s - s_0)$$

в виде модели основное состояние $h + \text{continuum}$, который начинается с порога $s = s_0$.

КХД ПС: общая схема

Вопрос: Почему вклад континуума моделируют с помощью пертурбативной спектральной плотности?

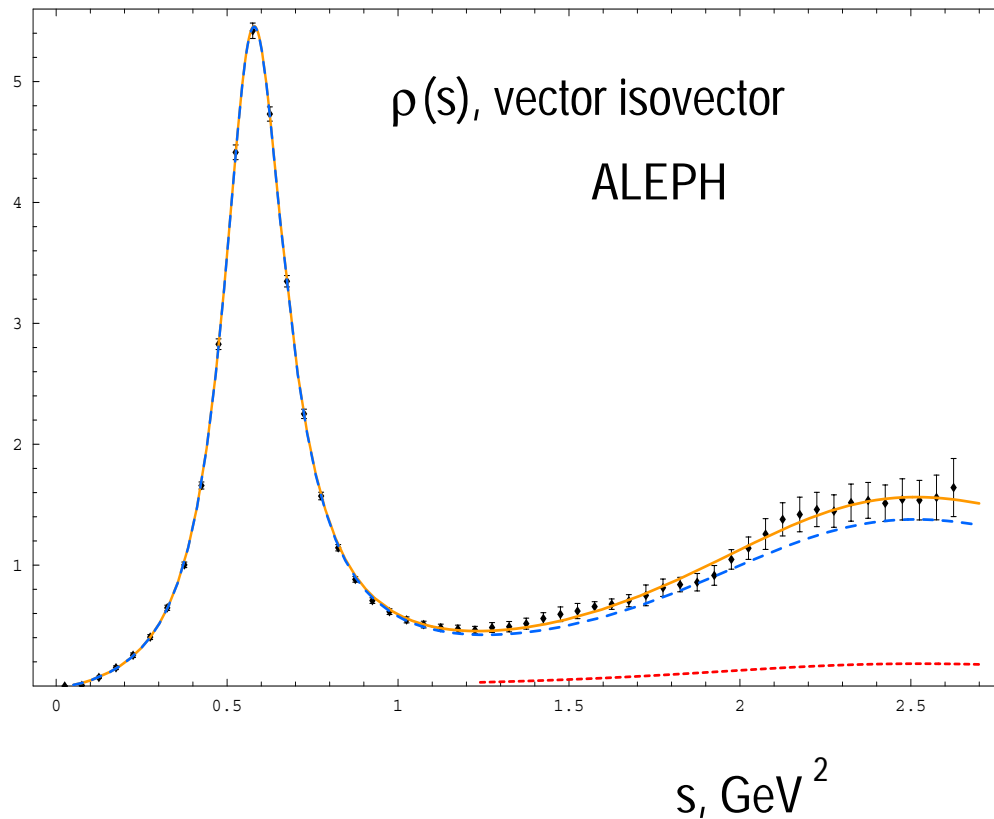
Ответ: у нас имеется строгое соотношение между кварковой и адронной спектральными плотностями при $M^2 \rightarrow \infty$ (когда все степенные поправки обращаются в 0)

$$\int_0^{\infty} \rho_{\text{pert}}(s) ds = \int_0^{\infty} \rho_{\text{had}}(s) ds ,$$

но оно дает нам право говорить о глобальной спектральной дуальности кварков и адронов. А вот эксперименты по e^+e^- -аннигиляции в адроны и по τ -распаду позволяют говорить и о локальной дуальности.

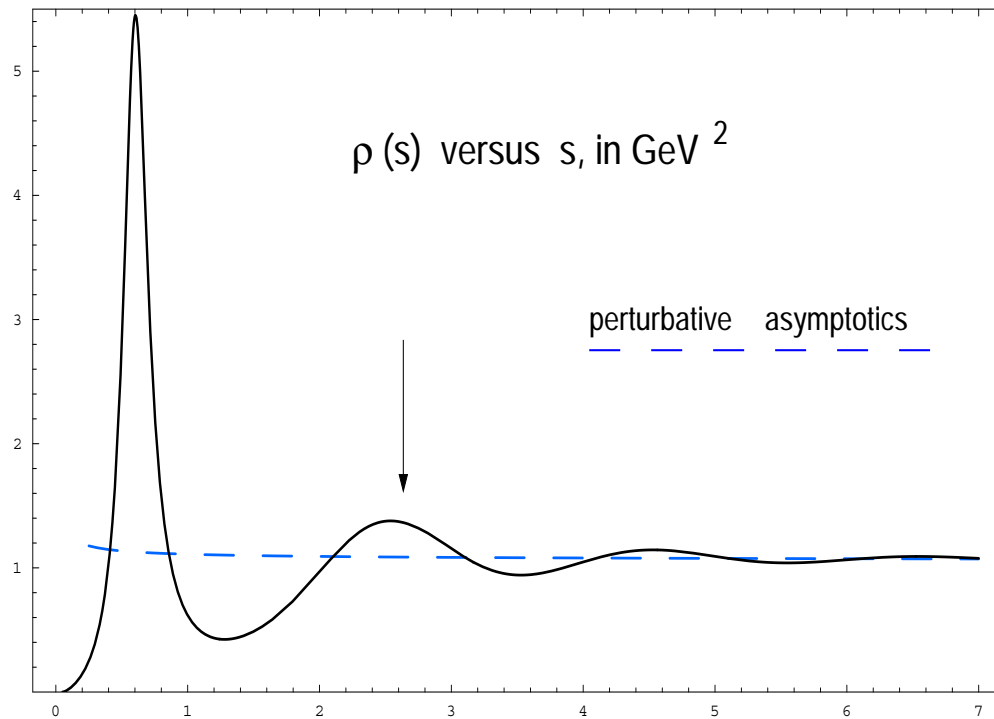
Кварк-адронная дуальность

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{pert}}(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{had}}(s) ds$$



Кварк-адронная дуальность

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{pert}}(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{had}}(s) ds$$



КХД ПС: аксиальный коррелятор

Рассмотрим коррелятор $F_{x \rightarrow q} \langle T [j_{\mu 5}^\dagger(x) j_{\nu 5}(0)] \rangle$ аксиальных токов

$$J_{\mu 5}^\dagger(x) = \bar{d}(x) \gamma_\mu \gamma_5 u(x) \quad \text{и} \quad J_{\nu 5}(0) = \bar{u}(0) \gamma_\nu \gamma_5 d(0).$$

Пионная константа распада определяется матричным элементом $\langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\mu \gamma_5 u(0) | \pi(P) \rangle = i f_\pi P_\mu$.

КХД ПС: аксиальный коррелятор

Рассмотрим коррелятор $F_{x \rightarrow q} \langle T [j_{\mu 5}^\dagger(x) j_{\nu 5}(0)] \rangle$ аксиальных токов

$$J_{\mu 5}^\dagger(x) = \bar{d}(x) \gamma_\mu \gamma_5 u(x) \quad \text{и} \quad J_{\nu 5}(0) = \bar{u}(0) \gamma_\nu \gamma_5 d(0).$$

Пионная константа распада определяется матричным элементом $\langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\mu \gamma_5 u(0) | \pi(P) \rangle = i f_\pi P_\mu$. Этот коррелятор разлагается в сумму

$$\Pi_{5\mu 5\nu}(q) = g_{\mu\nu} \Pi_1(Q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_2(Q^2).$$

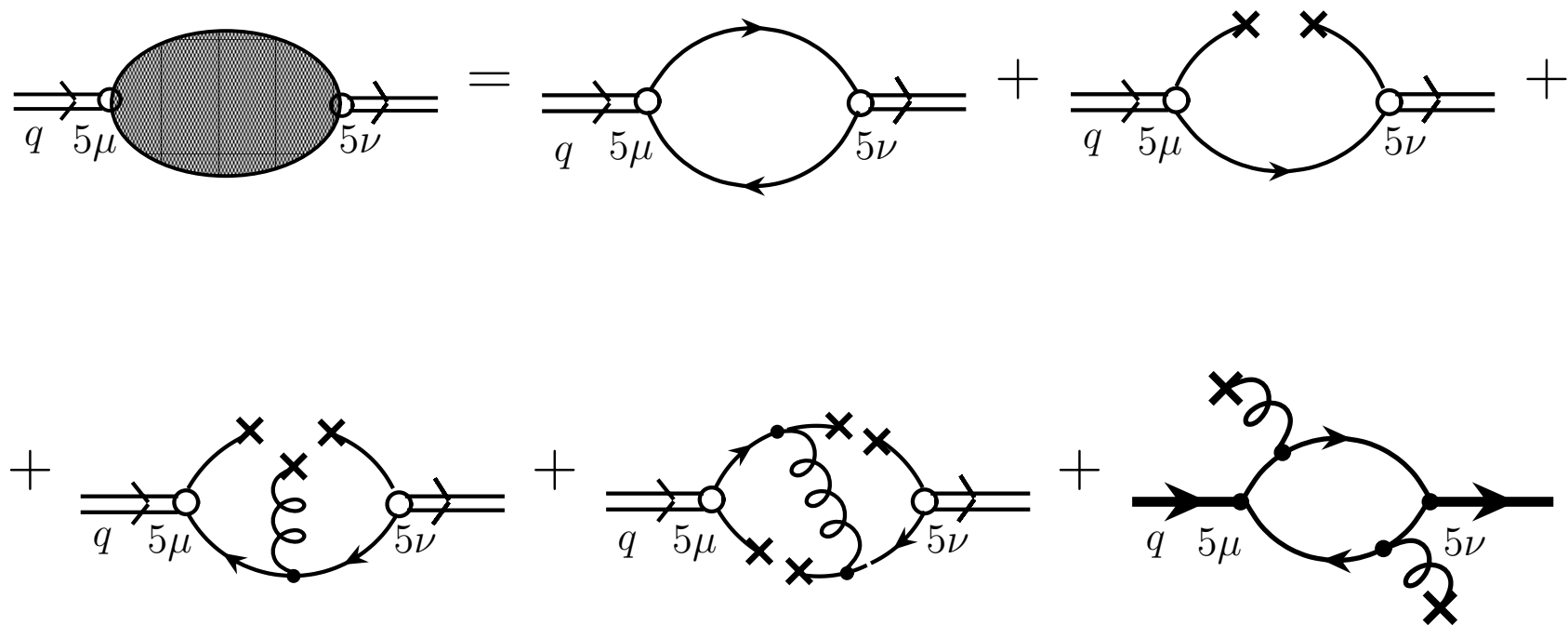
Нас будет интересовать коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале.

КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.

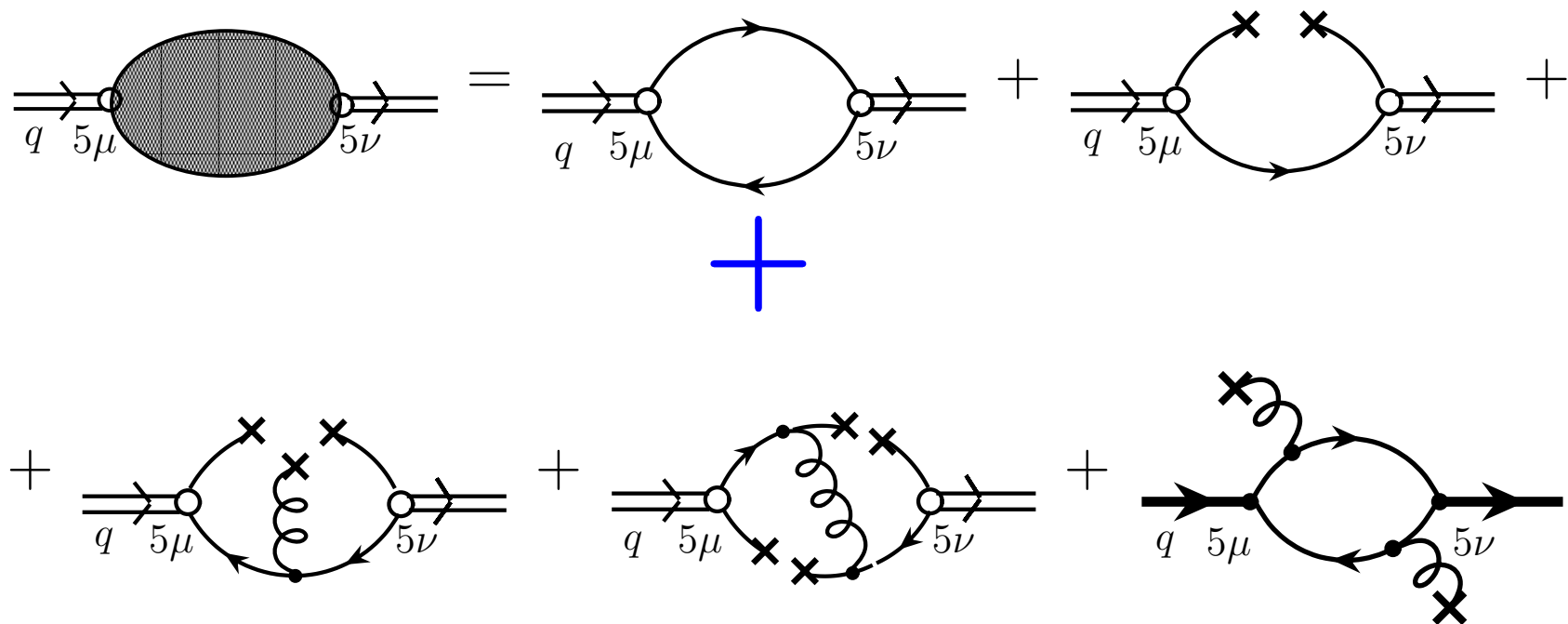
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



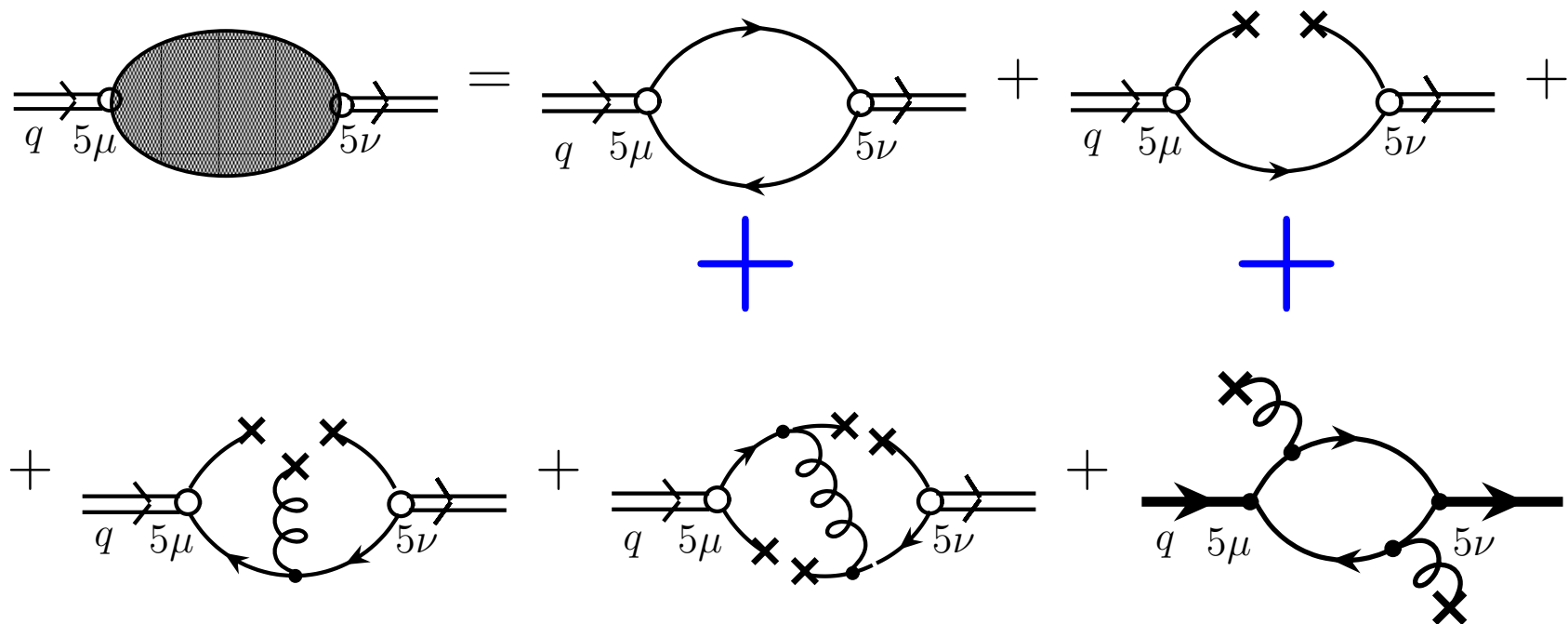
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



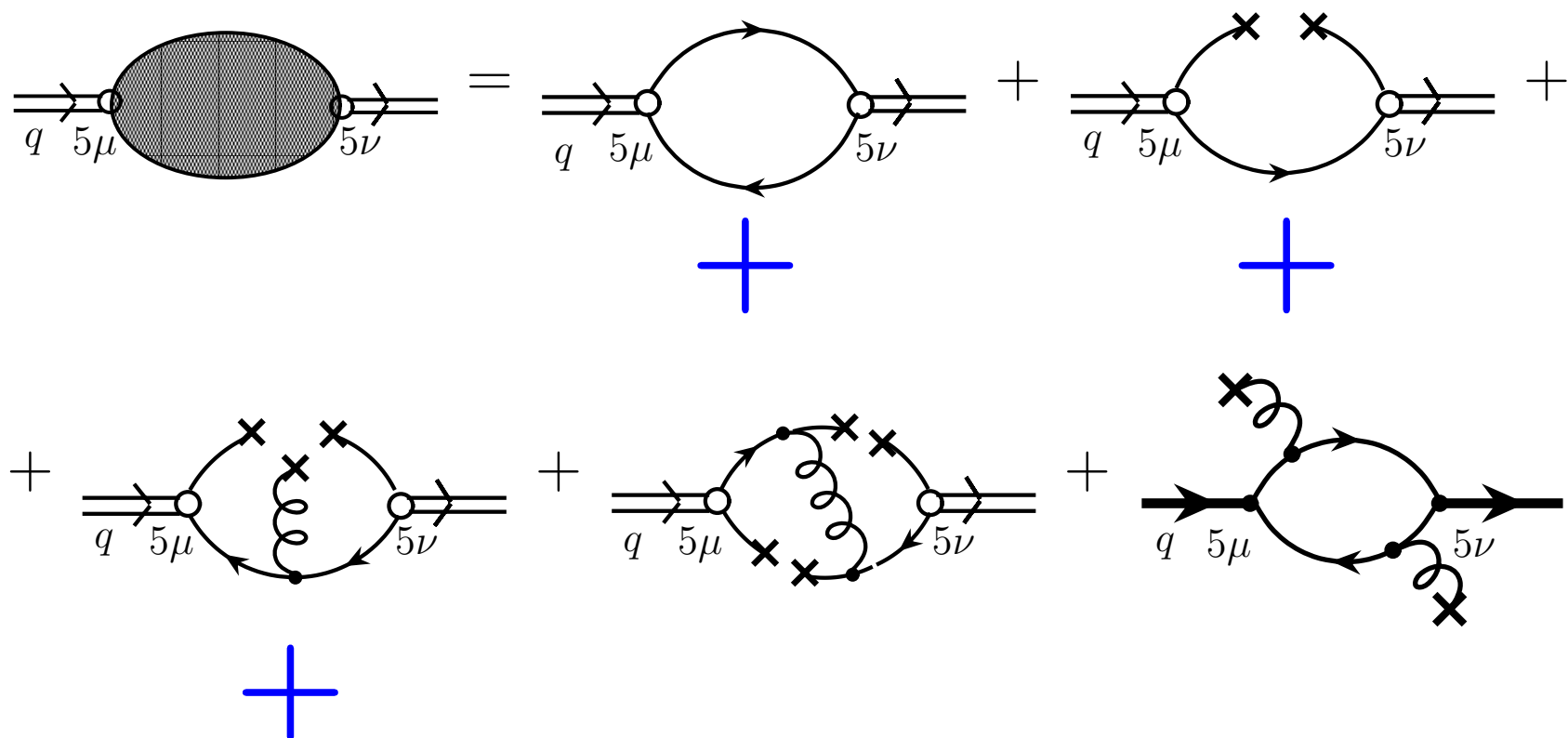
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



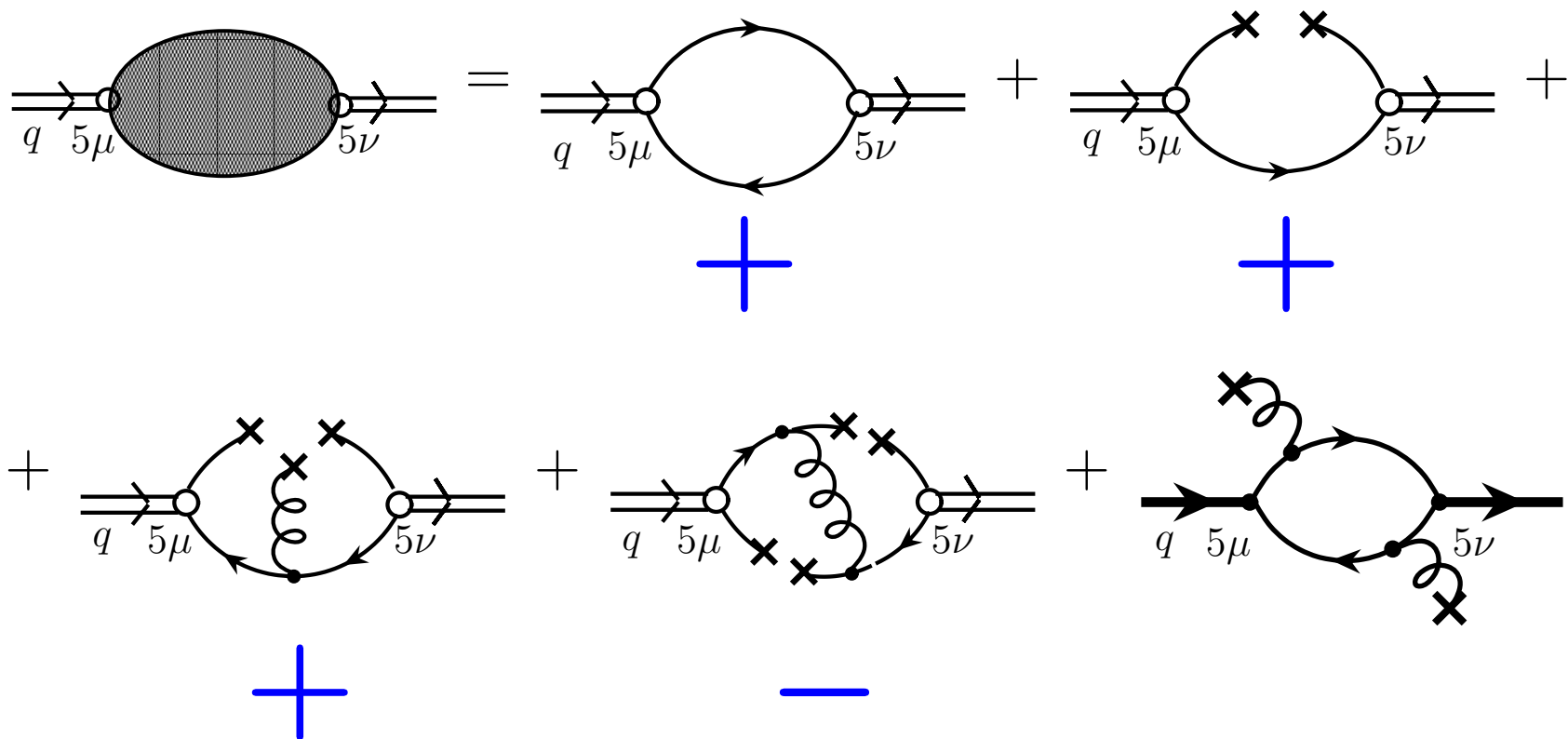
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



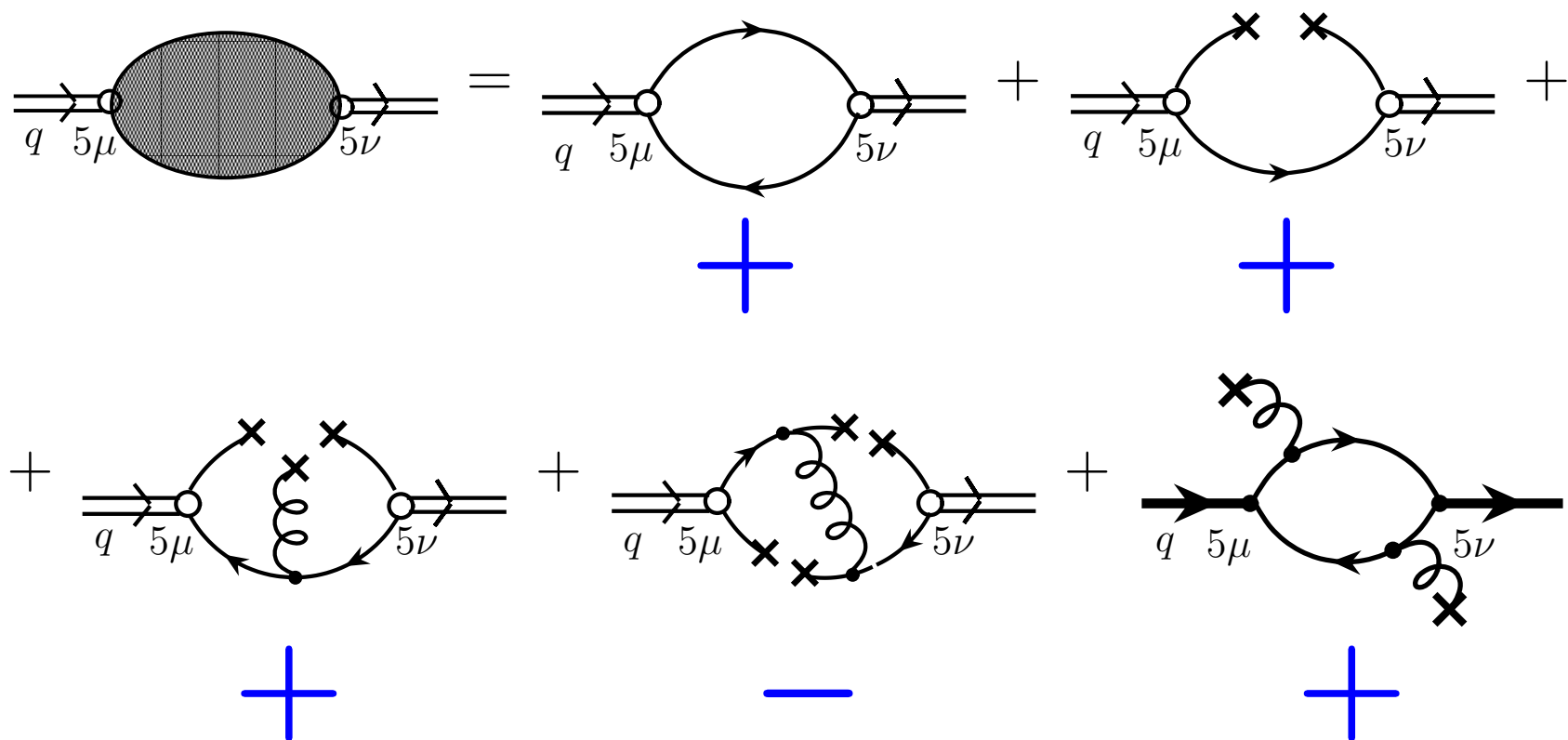
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



КХД ПС: пионная константа распада

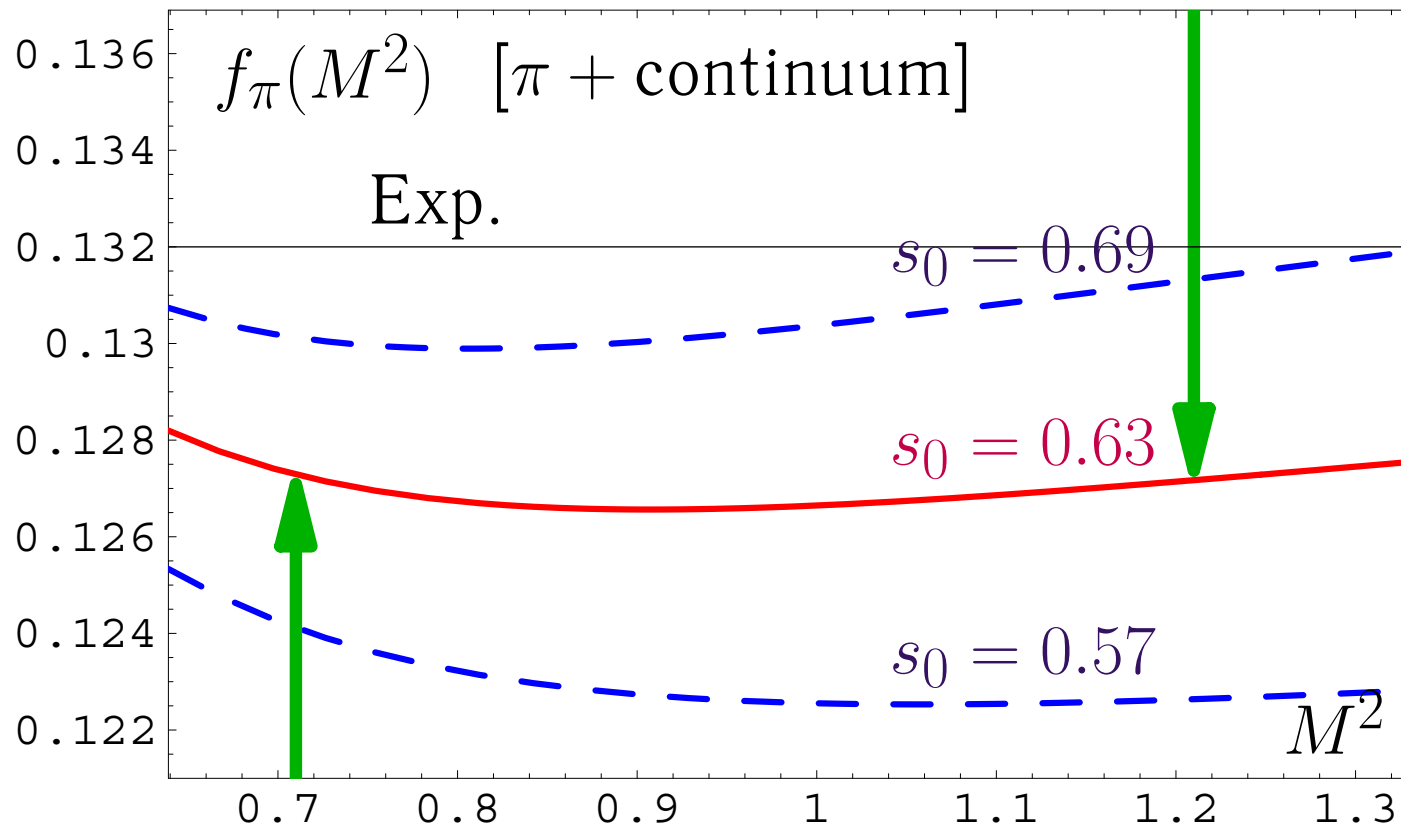
Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



КХД ПС: графики для f_π

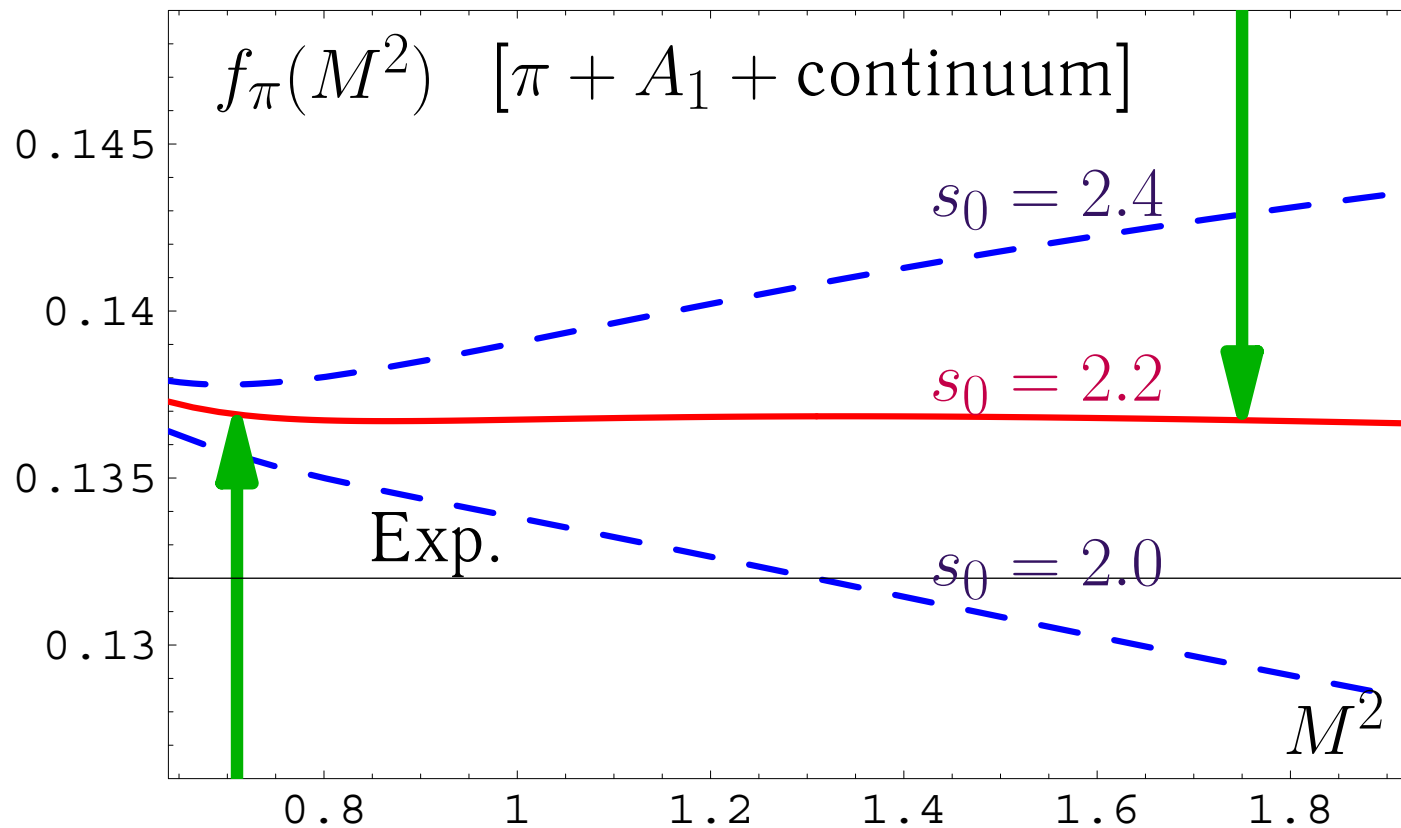
В результате получается следующее правило сумм

$$f_\pi^2 = \frac{M^2}{4\pi^2} \left(1 - e^{-s_0/M^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right] + \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle}{12M^2} + \frac{176}{81} \frac{\pi\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{M^4} .$$



КХД ПС: графики для f_π

В модели с A_1 -мезоном получается чуть большее значение $f_\pi = 0.137 \pm 0.13$ ГэВ, которое следует сравнить с $f_\pi^{\text{exp}} = 0.132$ ГэВ.



Локальная дуальность для f_π

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$4\pi^2 f_{\pi;\text{LD}}^2 = s_0^{\text{LD}} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right]$$

Оно дает значение $f_{\pi;\text{LD}} = 0.136$ ГэВ для определенного нами порога $s_0 = 0.63$ ГэВ².

Локальная дуальность для f_π

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$4\pi^2 f_{\pi;\text{LD}}^2 = s_0^{\text{LD}} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right]$$

Оно дает значение $f_{\pi;\text{LD}} = 0.136 \text{ ГэВ}$ для определенного нами порога $s_0 = 0.63 \text{ ГэВ}^2$.

Экспериментальное значение $f_\pi^{\text{exp}} = 0.132 \text{ ГэВ}$ дает нам наилучшее значение порога в подходе ЛД без учета α_s -поправки

$$s_0^{\text{LD}} \simeq 0.70 \text{ ГэВ}^2$$

Локальная дуальность для f_π

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$4\pi^2 f_{\pi;\text{LD}}^2 = s_0^{\text{LD}} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right]$$

Оно дает значение $f_{\pi;\text{LD}} = 0.136$ ГэВ для определенного нами порога $s_0 = 0.63$ ГэВ².

Экспериментальное значение $f_\pi^{\text{exp}} = 0.132$ ГэВ дает нам наилучшее значение порога в подходе ЛД без учета α_s -поправки

$$s_0^{\text{LD}} \simeq 0.70 \text{ ГэВ}^2$$

и в 1-петлевом приближении:

$$s_0^{\text{LD};1\text{-loop}} = 0.59 \text{ ГэВ}^2$$

КХД ПС
для
ФФ пиона

AAV-коррелятор: пионный вклад

Рассмотрим коррелятор двух аксиальных токов $j_{5\mu}$, $j_{5\nu}$ и электромагнитного тока $J^\alpha = e_u \bar{u} \gamma^\mu u + e_d \bar{d} \gamma^\mu d$

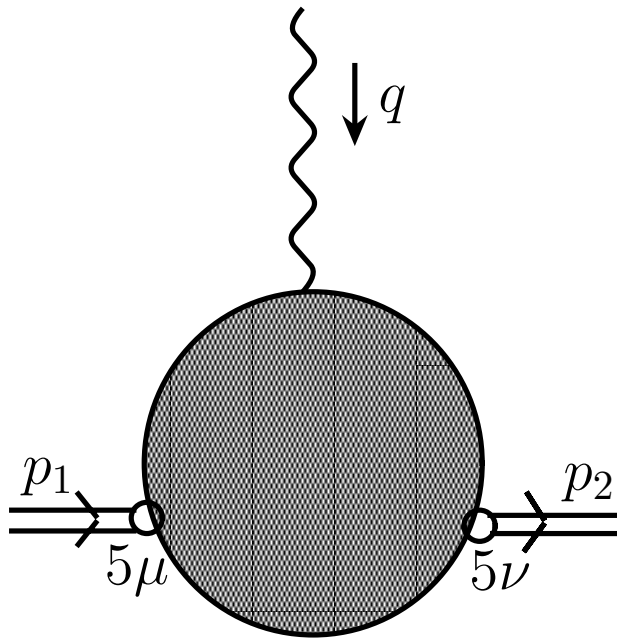
$$T_{\mu\nu}^\alpha(p_1, p_2) = \iint e^{-ip_1 x + ip_2 y} \langle 0 | T \{ j_{5\mu}(y) J^\alpha(0) j_{5\nu}^+(x) \} \rangle d^4 x d^4 y.$$

Пионный вклад равен

$$\langle 0 | j_\mu(y) | p_2 \rangle \langle p_2 | J^\alpha(0) | p_1 \rangle \langle p_1 | j_\nu^+(x) | 0 \rangle.$$

Здесь-то и возникает формфактор: $\langle p_2 | J^\alpha(0) | p_1 \rangle = (p_1 + p_2)^\alpha F(Q^2)$ (вспомните лекцию О. Теряева), а значит пионный вклад есть

$$2f_\pi^2 F(Q^2) P_\mu P^\alpha P_\nu + O(q^\alpha, q_\mu, q_\nu).$$



AAV-коррелятор: пионный вклад

Нас будет интересовать лоренцева структура $P_\mu P^\alpha P_\nu$, где $P = (p_1 + p_2)/2$. Для ее выделения будем умножать наш коррелятор на $n^\mu n_\alpha n^\nu / 2(nP)^3$, где 4-вектор n обладает свойствами: $n^2 = 0$, $np_1 = np_2 = nP$ и $nq = 0$:

$$T(p_1^2, p_2^2, q^2) = \frac{n^\mu n_\alpha n^\nu}{2(nP)^3} T_{\alpha\beta}^\mu(p_1, p_2).$$

Определим сразу борелевскую амплитуду $\Phi(M_1^2, M_2^2, Q^2)$ как двойное преобразование Бореля $-p_1^2 \rightarrow M_1^2$, $-p_2^2 \rightarrow M_2^2$ для амплитуды $T(-p_1^2, -p_2^2, q^2 = -Q^2)$. Для нее двойное дисперсионное представление запишется в виде

$$\Phi(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \int_0^\infty \frac{ds_1}{M_1^2} \int_0^\infty \frac{ds_2}{M_2^2} \rho(s_1, s_2, Q^2) e^{-s_1/M_1^2 - s_2/M_2^2}.$$

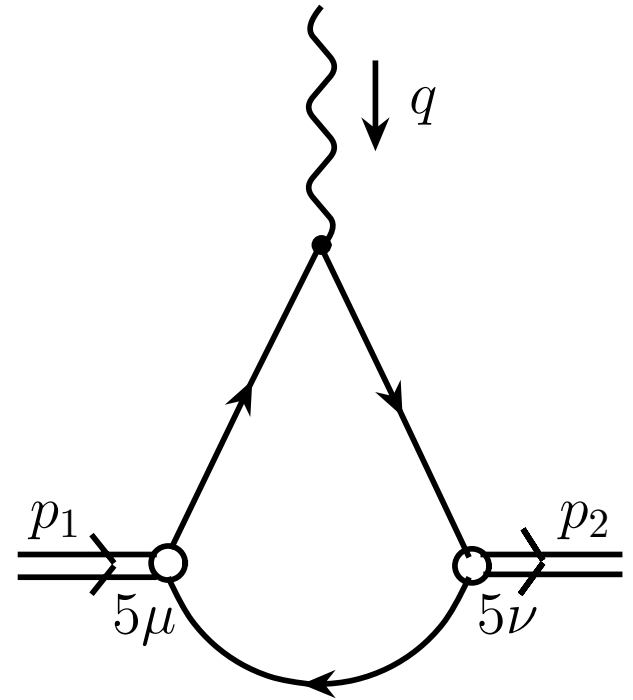
AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

Рассмотрим пертурбативный вклад.

$$\Phi^{\text{pert}}(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \frac{3}{2\pi^2(M_1^2 + M_2^2)}$$

$$\int_0^1 x \bar{x} \exp \left\{ \frac{-xQ^2}{\bar{x}(M_1^2 + M_2^2)} \right\} dx .$$

А вот и интересная задача:
найти спектральную плотность
 $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$.



AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

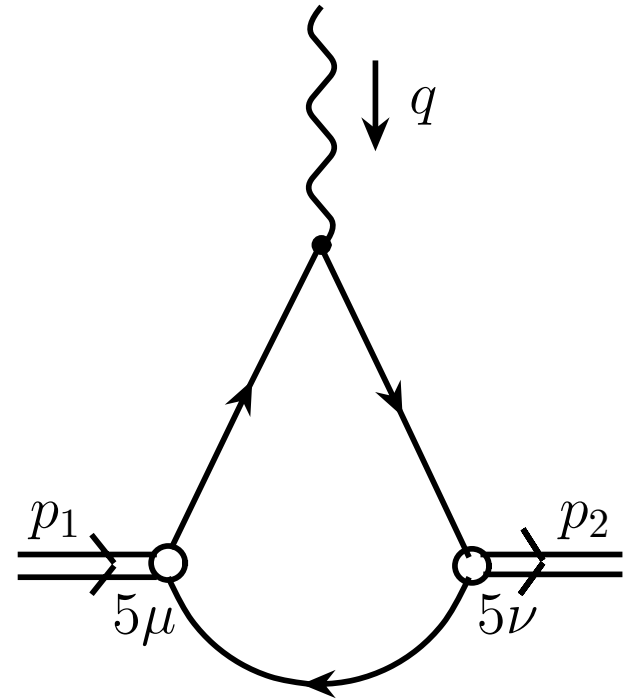
Рассмотрим пертурбативный вклад.

$$\Phi^{\text{pert}}(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \frac{3}{2\pi^2(M_1^2 + M_2^2)}$$

$$\int_0^1 x \bar{x} \exp \left\{ \frac{-xQ^2}{\bar{x}(M_1^2 + M_2^2)} \right\} dx .$$

А вот и интересная задача:
найти спектральную плотность
 $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$. Я выпишу ответ:

$$\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, t) = \frac{3}{4\pi^2} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^3}{3dt^3} \right] \frac{1}{\sqrt{(s_1 + s_2 + t)^2 - 4s_1 s_2}} .$$



AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

$$\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, t) = \frac{3}{4\pi^2} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^3}{3dt^3} \right] \frac{1}{\sqrt{(s_1 + s_2 + t)^2 - 4s_1s_2}}.$$

Свойства спектральной плотности $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$:

$$\bullet \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2 \gg s_i) = \frac{3}{2\pi^2} \left[\frac{s_1 + s_2}{Q^4} - 4 \frac{s_1^2 + s_2^2 + 4s_1s_2}{Q^6} + \dots \right]$$

AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

$$\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, t) = \frac{3}{4\pi^2} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^3}{3dt^3} \right] \frac{1}{\sqrt{(s_1 + s_2 + t)^2 - 4s_1s_2}}.$$

Свойства спектральной плотности $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$:

$$\bullet \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2 \gg s_i) = \frac{3}{2\pi^2} \left[\frac{s_1 + s_2}{Q^4} - 4 \frac{s_1^2 + s_2^2 + 4s_1s_2}{Q^6} + \dots \right]$$

$$\bullet \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2 \rightarrow 0) = \frac{1}{4\pi^2} \delta(s_1 - s_2) + \frac{Q^2}{4\pi^2} (s_1 + s_2) \delta''(s_1 - s_2) + \dots$$

Сейчас мы займемся получением $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2 = 0)$ из тождеств Уорда для AAV-коррелятора.

Тождества Уорда для AAV -коррелятора

Пусть

$$T_{\mu\nu}^{\alpha}(x, z, y) = \langle 0 | T \{ j_{5\mu}(y) J^{\alpha}(z) j_{5\nu}^{+}(x) \} \rangle .$$

Дифференцируем $T_{\mu,\nu}^{\alpha}(x, z, y)$ по z^{α}

$$\partial_{z^{\alpha}} T_{\mu,\nu}^{\alpha}(x, z, y) = e_{\pi} \langle 0 | T \left[j_{5\mu}^{+}(x) j_{5\nu}(y) \right] | 0 \rangle [\delta(z - x) - \delta(z - y)]$$

где $e_{\pi} \equiv e_u - e_d = 1$. Это — тождества Уорда (ТУ) в x -представлении.

Тождества Уорда для AAV -коррелятора

Пусть

$$T_{\mu\nu}^{\alpha}(x, z, y) = \langle 0 | T \{ j_{5\mu}(y) J^{\alpha}(z) j_{5\nu}^{+}(x) \} \rangle .$$

Дифференцируем $T_{\mu,\nu}^{\alpha}(x, z, y)$ по z^{α}

$$\partial_{z^{\alpha}} T_{\mu,\nu}^{\alpha}(x, z, y) = e_{\pi} \langle 0 | T \left[j_{5\mu}^{+}(x) j_{5\nu}(y) \right] | 0 \rangle [\delta(z - x) - \delta(z - y)]$$

где $e_{\pi} \equiv e_u - e_d = 1$. Это — тождества Уорда (ТУ) в x -представлении. В p -представлении

$$q_{\alpha} T_{\mu,\nu}^{\alpha}(p_1, p_2, q) = [\Pi_{5\mu,5\nu}(p_2) - \Pi_{5\mu,5\nu}(p_1)] ,$$

где $\Pi_{5\mu,5\nu}(p) \equiv i \int dx \exp(-ipx) \langle 0 | T \left[j_{5\mu}^{+}(x) j_{5\nu}(0) \right] | 0 \rangle$.

Тождества Уорда для AAV -коррелятора

Вводя лоренцевы структуры для корреляторов

$$\Pi_{5\mu,5\nu}(p) = g_{\mu\nu}\Pi_1(p^2) + p_\mu p_\nu \Pi_2(p^2)$$

$$T_{\mu,\nu}^\alpha(p_1, p_2, q) = 2 P_\mu P_\nu P^\alpha T(p_1^2, p_2^2, q^2) + P_\mu P_\nu q^\alpha T_0(p_1^2, p_2^2, q^2) + \dots$$

получаем тождества Уорда–Такахаши

$$(p_2^2 - p_1^2) T(p_1^2, p_2^2, Q^2) + Q^2 T_0(p_1^2, p_2^2, Q^2) = [\Pi(p_2^2) - \Pi(p_1^2)]$$

Тождества Уорда для AAV -коррелятора

Вводя лоренцевы структуры для корреляторов

$$\Pi_{5\mu,5\nu}(p) = g_{\mu\nu}\Pi_1(p^2) + p_\mu p_\nu \Pi_2(p^2)$$

$$T_{\mu,\nu}^\alpha(p_1, p_2, q) = 2 P_\mu P_\nu P^\alpha T(p_1^2, p_2^2, q^2) + P_\mu P_\nu q^\alpha T_0(p_1^2, p_2^2, q^2) + \dots$$

получаем тождества Уорда–Такахаши

$$(p_2^2 - p_1^2) T(p_1^2, p_2^2, Q^2) + Q^2 T_0(p_1^2, p_2^2, Q^2) = [\Pi(p_2^2) - \Pi(p_1^2)]$$

При $Q^2 = 0$ они сводятся к

$$(p_2^2 - p_1^2) T(p_1^2, p_2^2, 0) = [\Pi(p_2^2) - \Pi(p_1^2)].$$

что дает связь спектральных плотностей 3- и 2-точечных корреляторов.

Тождества Уорда для AAV -коррелятора

Вводя лоренцевы структуры для корреляторов

$$\Pi_{5\mu,5\nu}(p) = g_{\mu\nu}\Pi_1(p^2) + p_\mu p_\nu \Pi_2(p^2)$$

$$T_{\mu,\nu}^\alpha(p_1, p_2, q) = 2 P_\mu P_\nu P^\alpha T(p_1^2, p_2^2, q^2) + P_\mu P_\nu q^\alpha T_0(p_1^2, p_2^2, q^2) + \dots$$

получаем тождества Уорда–Такахаши

$$(p_2^2 - p_1^2) T(p_1^2, p_2^2, Q^2) + Q^2 T_0(p_1^2, p_2^2, Q^2) = [\Pi(p_2^2) - \Pi(p_1^2)]$$

При $Q^2 = 0$ они дают связь спектральных плотностей:

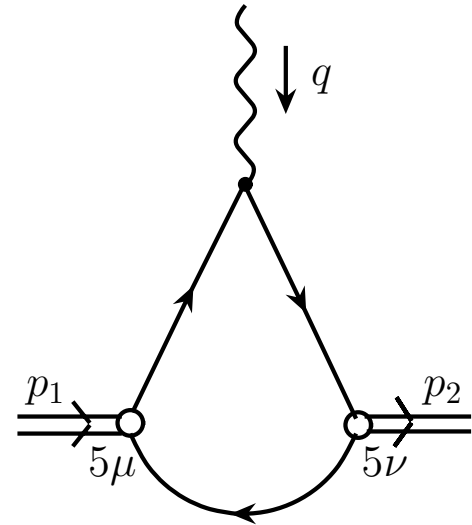
$$\rho_3(s_1, s_2, 0) = \delta(s_1 - s_2) \rho_2(s_1) = \frac{1}{4\pi^2} \delta(s_1 - s_2).$$

(back to pQCD)

AAV-коррелятор: операторное разложение

Пертурбативный вклад: $\Phi^{\text{pert}}(M^2, Q^2) =$

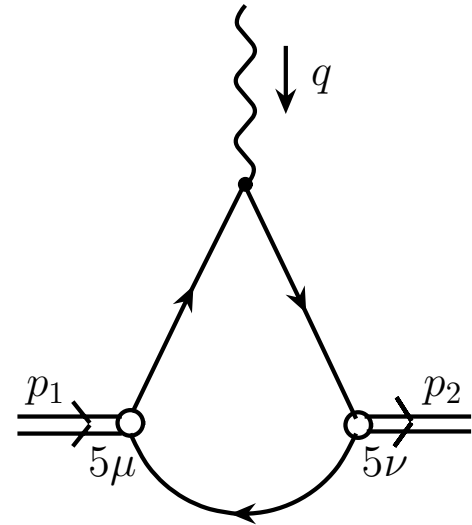
$$\frac{1}{M^4} \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) e^{-(s_1+s_2)/M^2} ds_1 ds_2$$



AAV-коррелятор: операторное разложение

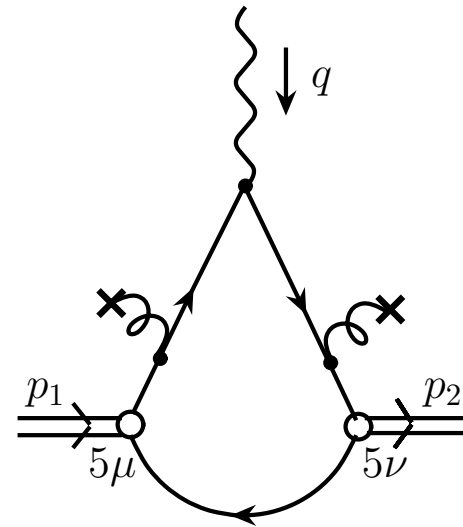
Пертурбативный вклад: $\Phi^{\text{pert}}(M^2, Q^2) =$

$$\frac{1}{M^4} \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) e^{-(s_1+s_2)/M^2} ds_1 ds_2$$



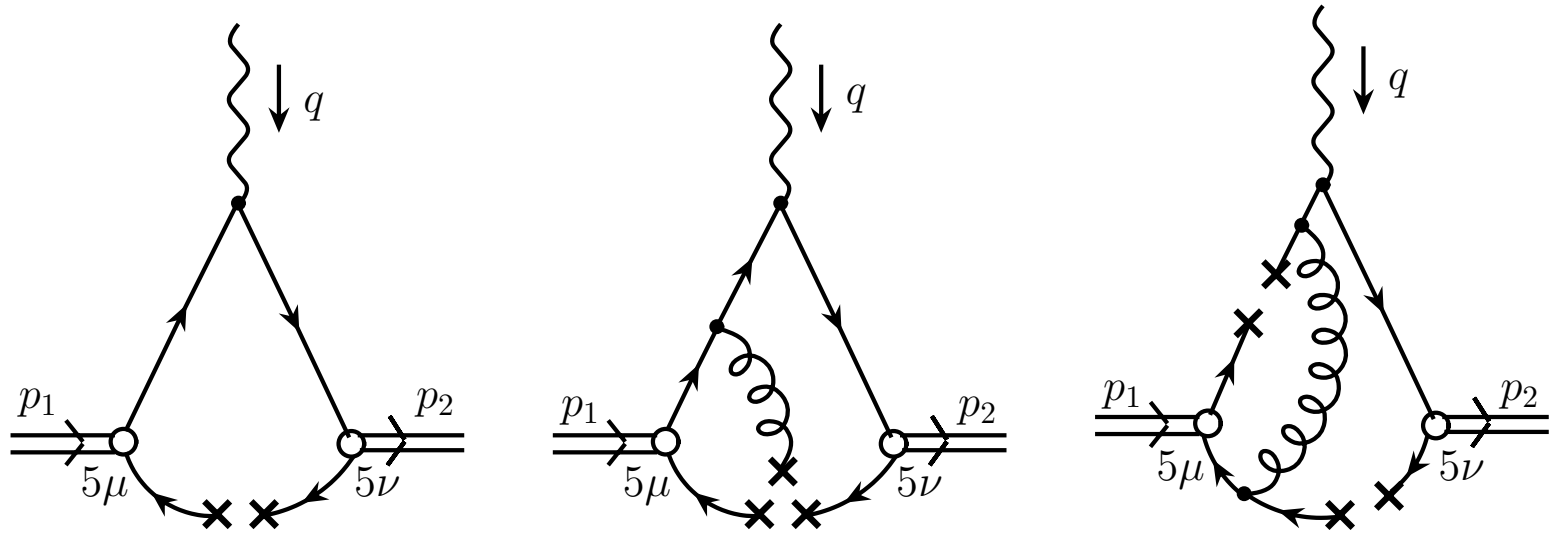
Вклад глюонного конденсата:

$$\Phi^{GG}(M^2, Q^2) = \frac{1}{12\pi M^6} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle$$



AAV-коррелятор: операторное разложение

Вклады кварковых конденсатов:



$$\Phi^{\bar{q}q}(M^2, Q^2) = \frac{208 \pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81 M^8} \left[1 + \frac{2 Q^2}{13 M^2} \right]$$

КХД правила сумм для $\Phi\Phi$ пиона

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \int_0^{s_0} ds_1 \int_0^{s_0} ds_2 \exp\left(-\frac{s_1 + s_2}{M^2}\right) \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) \\ + \frac{\alpha_s \langle GG \rangle}{12\pi M^2} + \frac{16 \pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81 M^4} \left[13 + 2 \frac{Q^2}{M^2} \right]$$

Это правило сумм хорошо работает в области $0.5 \text{ ГэВ}^2 \lesssim Q^2 \lesssim 2 \text{ ГэВ}^2$. И понятно почему: операторное разложение строилось в предположении $Q^2 \sim P_1^2 \sim P_2^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$.

КХД правила сумм для $\Phi\Phi$ пиона

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \int_0^{s_0} ds_1 \int_0^{s_0} ds_2 \exp\left(-\frac{s_1 + s_2}{M^2}\right) \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) \\ + \frac{\alpha_s \langle GG \rangle}{12\pi M^2} + \frac{16 \pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81 M^4} \left[13 + 2 \frac{Q^2}{M^2} \right]$$

Это правило сумм хорошо работает в области $0.5 \text{ ГэВ}^2 \lesssim Q^2 \lesssim 2 \text{ ГэВ}^2$. И понятно почему: операторное разложение строилось в предположении $Q^2 \sim P_1^2 \sim P_2^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$. В области малых Q^2 мы должны использовать тождества Уорда и строить операторное разложение в согласии с ним. В области больших Q^2 операторное разложение взрывается из-за растущих вкладов в коэффициенты.

Локальная дуальность
для
ФФ пиона

Локальная дуальность для $F_\pi(Q^2)$

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$F_{\pi;LD}(Q^2) = \int_0^{s_{LD}} ds_1 \int_0^{s_{LD}} ds_2 \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$$

и $s_{LD} \simeq 0.7 \text{ ГэВ}^2$.

Локальная дуальность для $F_\pi(Q^2)$

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$F_{\pi;LD}(Q^2) = \int_0^{s_{LD}} ds_1 \int_0^{s_{LD}} ds_2 \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$$

и $s_{LD} \simeq 0.7 \text{ ГэВ}^2$. Интегралы явно берутся и мы имеем простую формулу

$$F_{\pi;LD}(Q^2) = 1 - \frac{1 + 6 s_{LD}/Q^2}{[1 + 4 s_{LD}/Q^2]^{3/2}}$$

Эта формула замечательна тем, что в ней благодаря тождеству Уорда автоматически имеется $F_{\pi;LD}(0) = 1$.

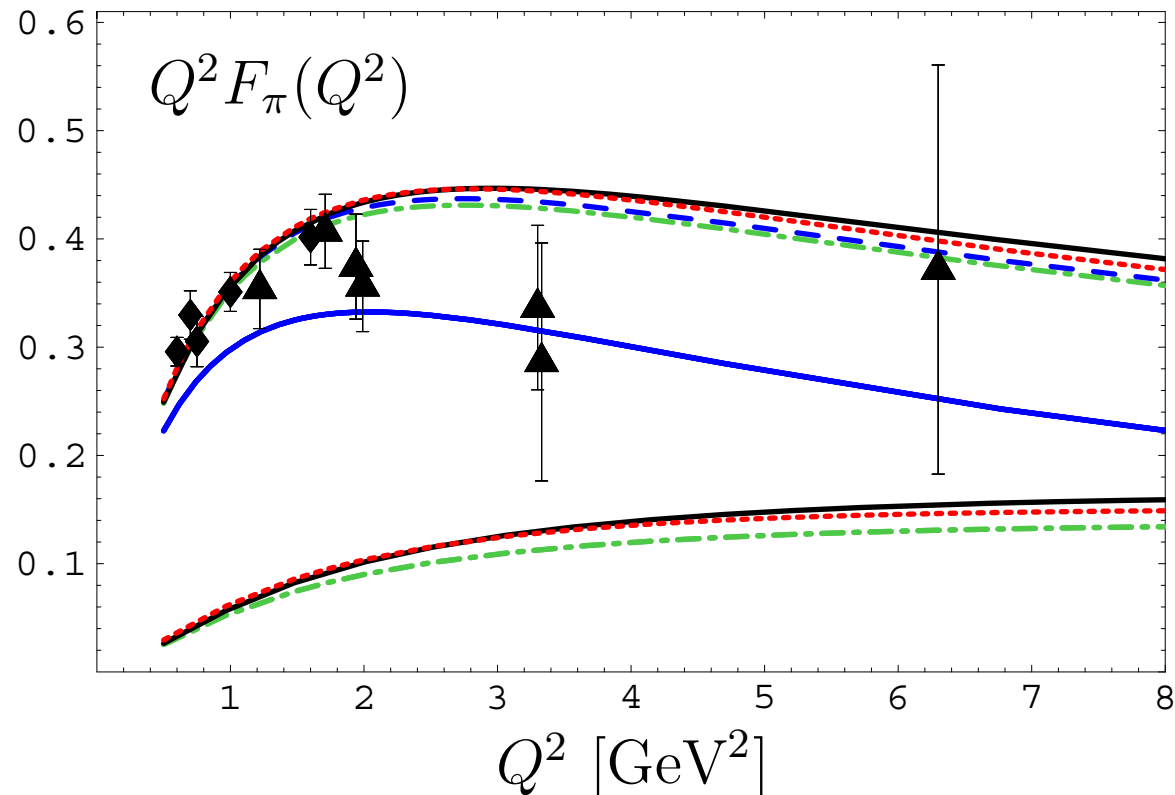
Жесткий КХД-вклад в ФФ пиона

Обмен жестким глюоном хорошо описывается формулой

$$\frac{1}{f_\pi^2} \int_0^{s_0} ds_1 \int_0^{s_0} ds_2 \Delta\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, q^2) \approx \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{1}{1 + Q^2/2s_0}.$$

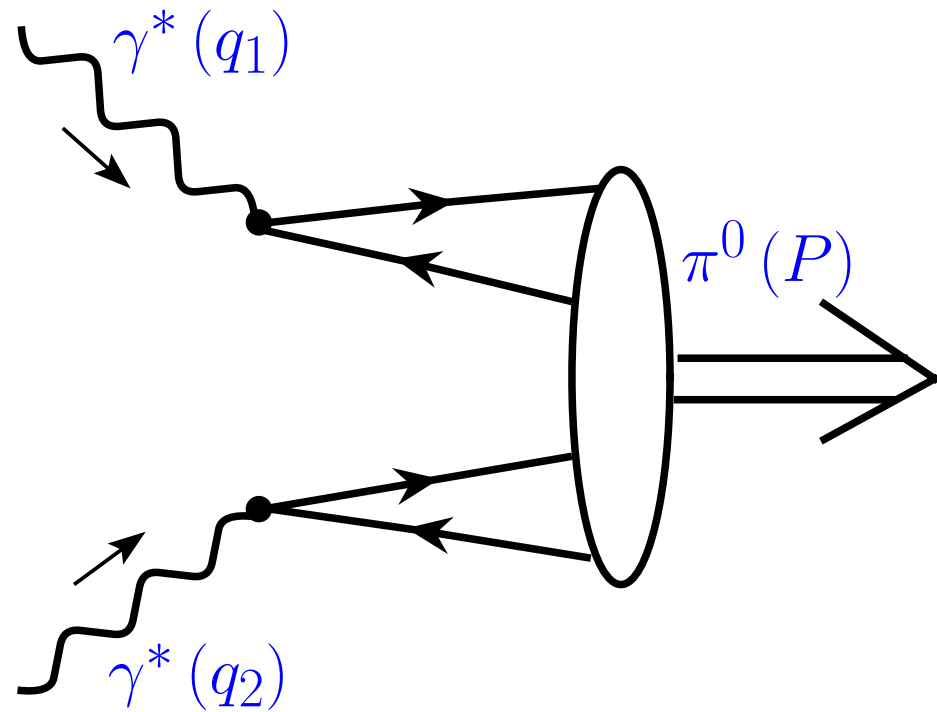
Получаем такую картинку: даже на $Q^2 = 8 \text{ ГэВ}^2$ мягкий вклад все еще большого жесткого глюонного обмена!

Хотя мягкий $\sim 1/Q^4$, а жесткий $\sim 1/Q^2$.



Факторизация и амплитуда распределения пиона в КХД ТВ

Факторизация для ФФ $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$ -перехода



Виртуальные фотоны γ^* “цепляются” за электромагнитные токи, $J_\mu = e_d \bar{d} \gamma_\mu d + e_u \bar{u} \gamma_\mu u$, кварков в пионе $\pi^0 = \frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}}$ (forward). В жестком процессе виртуальности фотонов $-q_1^2, -q_2^2 \gg m_\rho^2$.

Кинематика процесса

$$P = q_1 + q_2; \quad q = (q_1 - q_2)/2; \quad Q_i^2 \equiv -q_i^2$$

$$P^2 = m_\pi^2 \approx 0; \quad Q^2 \equiv -q^2 = (Q_1^2 + Q_2^2)/2 \gg m_\rho^2$$

Амплитуда (T) и формфактор (F)

$$\begin{aligned} T(q_1, \varepsilon_1; q_2, \varepsilon_2) &= \int dz^D e^{-iq_1 z} \langle 0 | \varepsilon_1^\mu J_\mu(z) \varepsilon_2^\nu J_\nu(0) | \pi(P) \rangle \\ &\equiv -i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu P^\rho q^\sigma F_{\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0}(q_1^2, q_2^2) \end{aligned}$$

Вычисляем в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q_1; q_2) &= \int dz^D e^{-iq_1 z} \langle 0 | J_\mu(z) J_\nu(0) \hat{S} | \pi(P) \rangle \\ &= \dots \sum_f e_f^2 \bar{\psi}_f(z) \overbrace{\gamma_\mu \psi_f(z) \bar{\psi}_f(0) \gamma_\nu \psi_f(0)} \dots \\ &= \dots \sum_f e_f^2 \bar{\psi}_f(z) \left[\gamma_\mu i \hat{S}(z) \gamma_\nu \right] \psi_f(0) \dots \end{aligned}$$

Тождество ($\varepsilon_{0123} = +1$):

$$\gamma_\mu \hat{z} \gamma_\nu = S_{\mu z \nu \alpha} \gamma^\alpha + i \varepsilon_{\mu z \nu \alpha} \gamma^\alpha \gamma_5$$

Появление пионной амплитуды $\varphi_\pi(x)$

$$T_{\mu\nu}(q_1; q_2) \sim \int dz^D e^{-iq_1 z} \left(\frac{z^\beta}{z^4} \right) \sum_f e_f^2 \underbrace{\langle 0 | \bar{\psi}_f(z) \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_f(0) | \pi(P) \rangle}$$

Появился новый объект — πAP

Появление пионной амплитуды $\varphi_\pi(x)$

$$T_{\mu\nu}(q_1; q_2) \sim \int dz^D e^{-iq_1 z} \left(\frac{z^\beta}{z^4} \right) \sum_f e_f^2 \underbrace{\langle 0 | \bar{\psi}_f(z) \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_f(0) | \pi(P) \rangle}$$

Появился новый объект — πAP . Этот объект содержит в себе всю непертурбативную информацию о пионе: все, что мы не можем вычислить в теории возмущений, убрано в него. Параметризация (back):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{d}(z) \gamma_\alpha \gamma_5 d(0) | \pi(P) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \bar{d}(z) \gamma_\alpha \gamma_5 u(0) | \pi(P) \rangle \\ &= \frac{if_\pi P_\alpha}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx e^{ix(zP)} \left[\varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x, \mu^2) + z^2 g_1^{\text{Tw-4}}(x, \mu^2) \right] \end{aligned}$$

Вклады **ведущего** и **высшего** твистов разделены.

Твисты и сингулярности на световом конусе

Чем важно разделение сингулярностей по z^2 ?

$$T_{\mu\nu}(q_1; q_2) \sim \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha \int_0^1 dx \int dz^D e^{-i(q_1 - xP)z} \left[\frac{z^\beta}{z^4} \varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x, \mu^2) + \frac{z^\beta}{z^2} g_1^{\text{Tw-4}}(x, \mu^2) \right]$$

Тем, что мы можем сразу определить ведущий вклад и его асимптотику при больших Q^2 . Действительно ($D = 4 - 2\varepsilon$):

$$\frac{z^\beta}{z^4} \xrightarrow{\text{Фурье}} \frac{(q_1 - xP)^\beta}{(q_1 - xP)^2}; \quad \frac{z^\beta}{z^2} \xrightarrow{\text{Фурье}} 4 \frac{(q_1 - xP)^\beta}{(q_1 - xP)^4}$$

Кусок с q_1^β даст структуру формфактора $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q_1^\beta$. А что будет с куском $\sim xP$ из числителя?

Преобразование Фурье в D измерениях

Для $D = 4 - 2\varepsilon$:

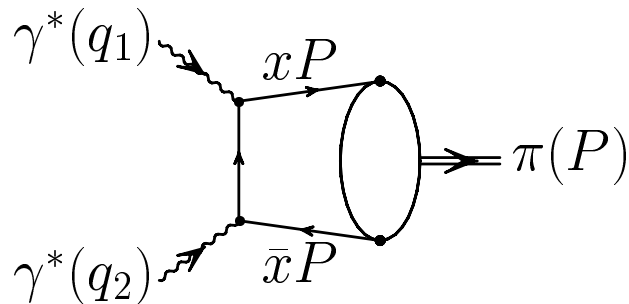
$$i \int \frac{e^{-iqz} dz^D}{(-z^2 + i0)^n} = \frac{\Gamma(D/2 - n)}{\Gamma(n)} \frac{2^{D-2n} \pi^{D/2}}{(-q^2 - i0)^{D/2-n}}$$
$$\frac{-i}{(2\pi)^D} \int \frac{e^{iqz} dq^D}{(-q^2 - i0)^n} = \frac{\Gamma(D/2 - n)}{\Gamma(n)} \frac{2^{-2n} \pi^{-D/2}}{(-z^2 + i0)^{D/2-n}}$$

Задача для любознательных: показать, что оба преобразования согласуются друг с другом.

Факторизация для $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$ -формфактора

Результат для формфактора перехода $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi$:

$$(q_1 - xP)^2 = \bar{x}Q_1^2 + xQ_2^2$$



$$F_{\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0}(Q_1^2, Q_2^2) =$$
$$-q_{1,2}^2 = Q_{1,2}^2 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$$

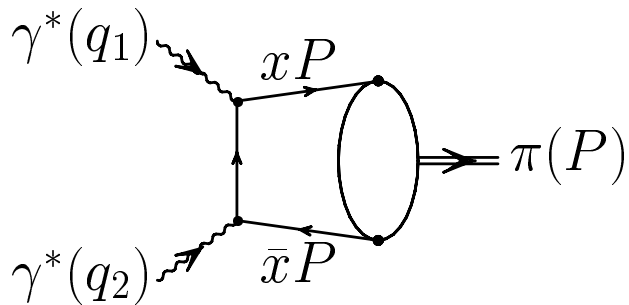
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} f_\pi \int_0^1 \frac{\varphi_\pi(x; \mu^2)}{Q_1^2 \bar{x} + Q_2^2 x} dx + O\left(\frac{\delta_{\text{Tw-4}}^2}{Q^4}\right)$$

Здесь $\delta_{\text{Tw-4}}^2$ – масштаб вклада твиста 4

Факторизация: общая схема

Формфактор перехода $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi$:

разделение **малых** и **больших** расстояний



$$F_{\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0}(Q_1^2, Q_2^2) =$$
$$-q_{1,2}^2 = Q_{1,2}^2 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$$

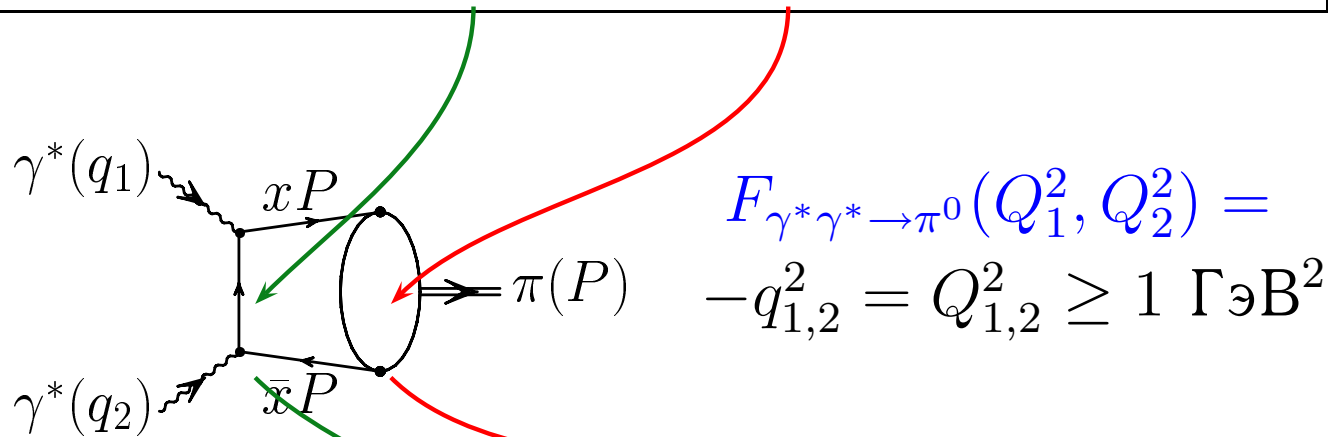
$$= C(q_1^2, q_2^2; \mu^2; x) \otimes \varphi_\pi(x; \mu^2) + O\left(\frac{\delta_{\text{Tw-4}}^2}{Q^4}\right)$$

Здесь $\delta_{\text{Tw-4}}^2$ – масштаб вклада твиста 4

Факторизация: общая схема

Формфактор перехода $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi$:

разделение **малых** и **больших** расстояний



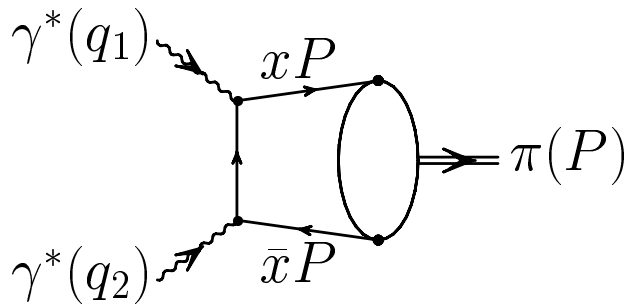
$$= \boxed{C(q_1^2, q_2^2; \mu^2; x)} \otimes \boxed{\varphi_\pi(x; \mu^2)} + O\left(\frac{\delta_{\text{Tw-4}}^2}{Q^4}\right)$$

Здесь $\delta_{\text{Tw-4}}^2$ – масштаб вклада твиста 4

Факторизация: общая схема

Формфактор перехода $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi$:

$\varphi_\pi(x)$ появляется в виде свертки



$$F_{\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0}(Q_1^2, Q_2^2) =$$
$$-q_{1,2}^2 = Q_{1,2}^2 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$$

$$\simeq \int_0^1 \frac{\varphi_\pi(x; \mu^2)}{Q_1^2 \bar{x} + Q_2^2 x} dx + O\left(\frac{\delta_{\text{Tw-4}}^2}{Q^4}\right)$$

Факторизация: общие свойства πAP

Итак, что же такое πAP $\varphi_\pi(x, \mu^2)$ ведущего твиста 2?

- она описывает матричный элемент нелокального аксиального тока на световом конусе

$$\langle 0 | [\bar{d}(z) \gamma_\alpha \gamma_5 E(z, 0) u(0)]_{\mu^2} | \pi(P) \rangle \Big|_{z^2=0} =$$
$$i f_\pi P_\alpha \int_0^1 dx e^{ix(zP)} \varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x, \mu^2)$$

Факторизация: общие свойства πAP

Итак, что же такое πAP $\varphi_\pi(x, \mu^2)$ ведущего твиста 2?

- она описывает матричный элемент нелокального аксиального тока на световом конусе

$$\langle 0 | [\bar{d}(z) \gamma_\alpha \gamma_5 E(z, 0) u(0)]_{\mu^2} | \pi(P) \rangle \Big|_{z^2=0} =$$
$$i f_\pi P_\alpha \int_0^1 dx e^{ix(zP)} \varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x, \mu^2)$$

- она калибровочно-инвариантна за счет струны Фока–Швингера:

$$E(z, 0) = \mathcal{P} e^{ig \int_0^z A_\mu(\tau) d\tau^\mu}$$

Факторизация: общие свойства πAP

Итак, что же такое πAP $\varphi_\pi(x, \mu^2)$ ведущего твиста 2?

- она описывает матричный элемент нелокального аксиального тока на световом конусе

$$\langle 0 | [\bar{d}(z) \gamma_\alpha \gamma_5 E(z, 0) u(0)]_{\mu^2} | \pi(P) \rangle \Big|_{z^2=0} =$$
$$i f_\pi P_\alpha \int_0^1 dx e^{ix(zP)} \varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x, \mu^2)$$

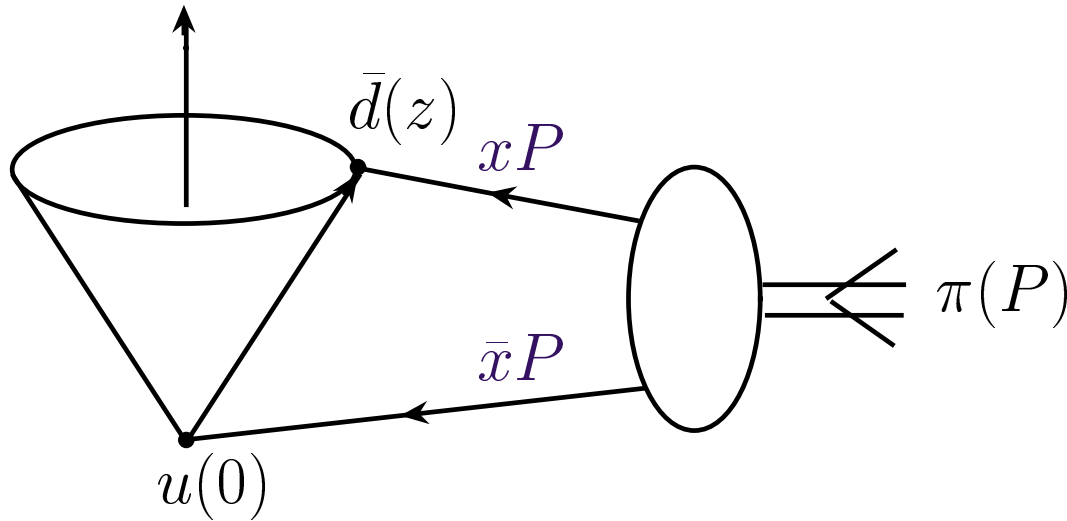
- она калибровочно-инвариантна за счет струны Фока–Швингера:

$$E(z, 0) = \mathcal{P} e^{ig \int_0^z A_\mu(\tau) d\tau^\mu}$$

В твисте 4 имеется 6 различных πAP , четыре имеют значение для анализа $F_{\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0}(Q_1^2, Q_2^2)$.

Факторизация: физический смысл πAP

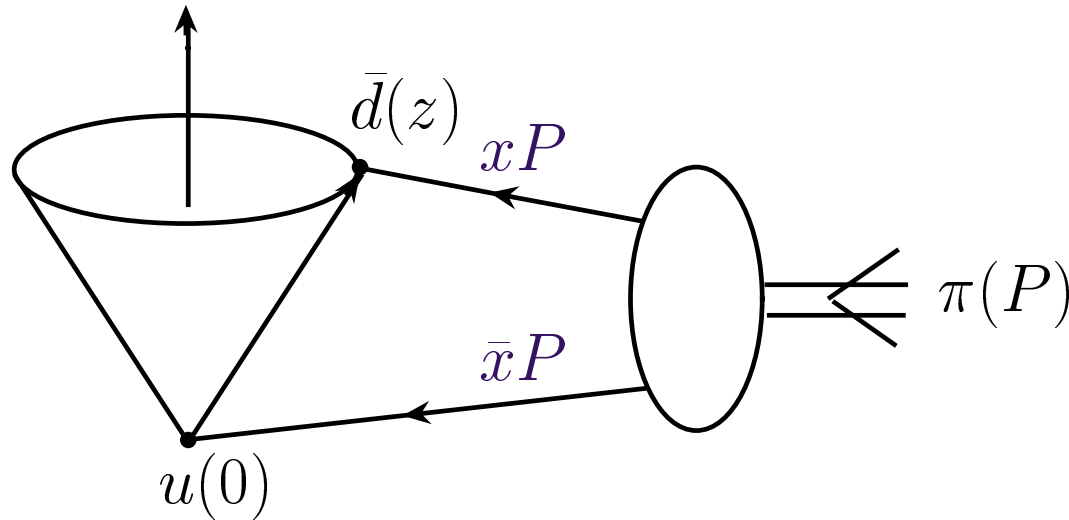
$\varphi_\pi(x; \mu^2)$ – амплитуда перехода $\pi \rightarrow u + d$



- нормировка на 1
- симметрична по замене $x \rightleftharpoons \bar{x}$
(здесь $\bar{x} \equiv 1 - x$)

Факторизация: физический смысл πAP

$\varphi_\pi(x; \mu^2)$ – амплитуда перехода $\pi \rightarrow u + d$



- нормировка на 1
- симметрична по замене $x \rightleftharpoons \bar{x}$
(здесь $\bar{x} \equiv 1 - x$)

- мультипликативно перенормируема

[Ефремов–Радюшкин; Бродский–Лепаж, (ЕРБЛ)]

- асимптотическая πAP в 1-петлевом приближении:

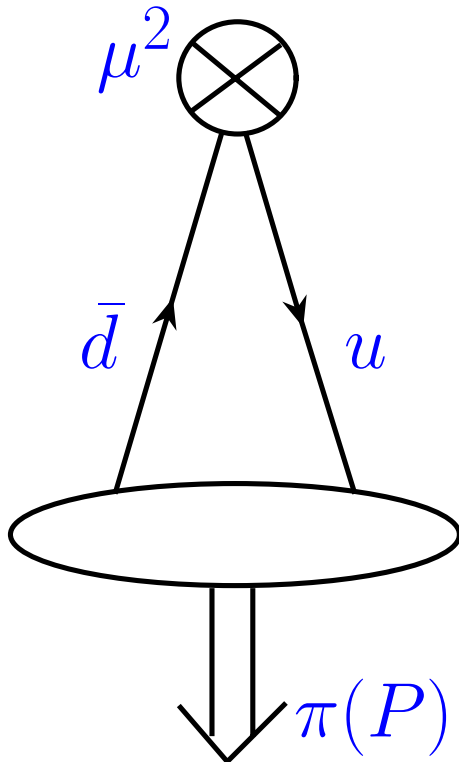
$$\varphi_\pi(x; \mu^2 \rightarrow \infty) = \varphi^{As}(x) = 6x(1 - x)$$

Факторизация: эволюция πAP в пКХД

$\varphi_\pi(x; \mu^2)$ зависит от масштаба μ^2 . Эта зависимость полностью определяется в пКХД уравнением ЕРБЛ:

$$\frac{d\varphi_\pi(x; \mu^2)}{d \ln \mu^2} = V(x, u; \alpha_s(\mu^2)) \otimes_u \varphi_\pi(u; \mu^2)$$

$$V(x, u; \alpha_s) = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) V_0(x, u) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 V_1(x, u) + \dots$$

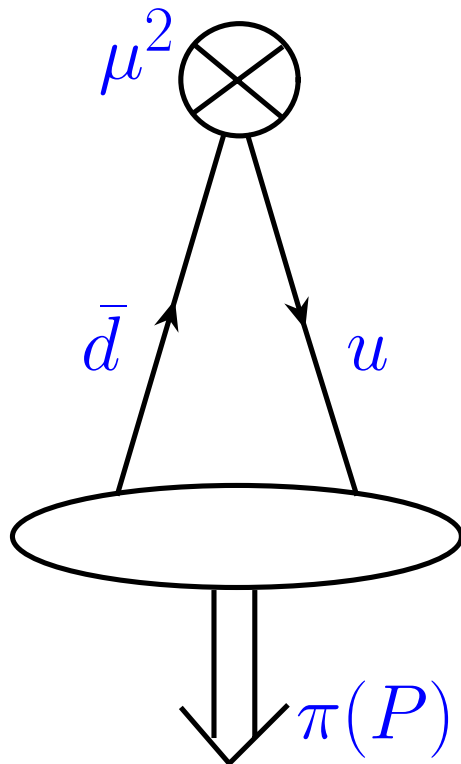


Факторизация: эволюция πAR в пКХД

$\varphi_\pi(x; \mu^2)$ зависит от масштаба μ^2 . Эта зависимость полностью определяется в пКХД уравнением ЕРБЛ:

$$\frac{d \varphi_\pi(x; \mu^2)}{d \ln \mu^2} = V(x, u; \alpha_s(\mu^2)) \otimes_u \varphi_\pi(u; \mu^2)$$

$$V(x, u; \alpha_s) = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) V_0(x, u) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 V_1(x, u) + \dots$$



Решение ЕРБЛ: $\varphi_\pi(x; \mu^2) = \varphi^{As}(x) \times$
 $\times \left[1 + a_2(\mu^2) C_2^{3/2}(\xi) + a_4(\mu^2) C_4^{3/2}(\xi) + \dots \right]_{\xi \equiv 2x-1}$

где $C_n^{3/2}(\xi)$ – полиномы Гегенбауера (собственные функции 1-петлевого ядра ЕРБЛ-эволюции).

Факторизация: эволюция πAP в ПКХД

При этом вся μ^2 -зависимость переходит в коэффициенты:

$$\varphi_\pi(x; \mu^2) \Leftrightarrow \{a_2(\mu^2), a_4(\mu^2), \dots\},$$

причем в 1-петлевом приближении

$$a_n^{1\text{-loop}}(\mu^2) = a_n(\mu_0^2) \left[\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\alpha_s(\mu_0^2)} \right]^{\gamma_0(n)/(2b_0)},$$

где $\gamma_0(n)$ – аномальные размерности, определяемые собственными значениями 1-петлевого ядра эволюции V_0 , а b_0 – первый коэффициент разложения бета-функции КХД:

$$\beta(\alpha_s(Q^2)) \equiv \frac{d\alpha_s(\mu^2)}{d\ln(\mu^2)} = -\frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{4\pi} \left[b_0 + b_1 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} + \dots \right].$$

Лекция закончена!